

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS  
*Campus* DIVINÓPOLIS  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECATRÔNICA

Jônathas Vinícius do Valle Silva

MODELAGEM MATEMÁTICA A PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS E CONTROLE EM MALHA  
FECHADA DE UM SISTEMA DE AQUECIMENTO DE AR



Divinópolis  
2014



Jônathas Vinícius do Valle Silva

MODELAGEM MATEMÁTICA A PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS E CONTROLE EM MALHA  
FECHADA DE UM SISTEMA DE AQUECIMENTO DE AR

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Colegiado de Graduação em Engenharia Mecatrônica como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Engenheiro Mecatrônico.

Eixo de Formação: Modelagem e Controle de Processos, Circuitos Elétricos e Eletrônicos.

Orientador: Valter Júnior de Souza Leite



Divinópolis  
2014



Jônathas Vinícius do Valle Silva

Candidato a Engenheiro Mecatrônico

CEFET/MG *Campus* Divinópolis

MODELAGEM MATEMÁTICA A PARÂMETROS DISTRIBUÍDOS E CONTROLE EM MALHA  
FECHADA DE UM SISTEMA DE AQUECIMENTO DE AR

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Colegiado de Graduação em Engenharia Mecatrônica como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Engenheiro Mecatrônico.

Área de concentração: Modelagem e Controle de Processos.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite  
CEFET/MG *Campus* Divinópolis

Prof. M. Sc. Marlon Henrique Teixeira  
CEFET/MG *Campus* Divinópolis

Prof. M. Sc. Emerson de Sousa Costa  
CEFET/MG *Campus* Divinópolis

Divinópolis  
2014





Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
CEFET-MG / *Campus V* - Divinópolis  
Curso de Engenharia Mecatrônica

Monografia intitulada “Modelagem Matemática a parâmetros distribuídos e Controle em Malha Fechada de um sistema de aquecimento de ar” de autoria do graduando Jônathas Vinícius do Valle Silva, aprovada pela banca constituída pelos seguintes professores:

---

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite - CEFET-MG / *Campus* Divinópolis - Orientador

---

Prof. M. Sc. Marlon Henrique Teixeira - CEFET-MG / *Campus* Divinópolis

---

Prof. M. Sc. Emerson de Sousa Costa - CEFET-MG / *Campus* Divinópolis

---

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecatrônica  
CEFET-MG / *Campus* Divinópolis

Divinópolis - Fevereiro de 2014



DEDICO ESTE TRABALHO AOS  
MEUS PAIS UILTON E FRANCISCA,  
POR ME MOSTRAREM QUE O VALOR  
DE UM HOMEM ESTÁ NA NOBREZA  
DE SEUS PENSAMENTOS E ATOS.



# Agradecimentos

Agradeço,

à minha família pelo apoio constante ao longo desta jornada, em especial a meus pais, por serem exemplos de vida e me tornarem reflexo em seu espelho.

À minha namorada Jéssica, pelo companheirismo e amor incondicional em todos os momentos.

Aos professores do CEFET-MG, em especial ao meu orientador Valter Junior de Souza Leite e ao professor Rônei Sandro Vieira, grandes mentores em minha vida acadêmica.

Aos colegas de curso e demais funcionários do campus Divinópolis, em especial aos colegas Nelson de Figueiredo Barroso e André Francisco Caldeira, ao servidor Luis Antônio Pontes (Seu Luiz) e aos técnicos Mateus Teixeira Rocha e Henderson Soares Madureira, sem os quais este trabalho não seria possível.

Aos moradores da República Paiol, pelos longos anos de convivência.

À gloriosa Polícia Civil de Minas Gerais, pelas lições que jamais eu teria em outra escola.

Enfim, a todos que, de certa forma, contribuíram para minha formação.



”Se você pensa que pode ou se você pensa que não pode, nos dois casos você está absolutamente correto.”

Henry Ford



# Resumo

SILVA, Jônathas Vinícius do Valle. Modelagem Matemática a Parâmetros distribuídos e Controle em malha fechada de um sistema de aquecimento de ar. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – *Campus* Divinópolis, 2013.

O presente Trabalho de Conclusão de Curso trata dos procedimentos realizados para modelagem a parâmetros distribuídos de um sistema de aquecimento de ar. Tal sistema encontra-se atualmente instalado no Laboratório de Sinais e Sistemas do Cefet-MG, Campus Divinópolis. Para tanto, são abordadas duas técnicas: a utilização de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) e a interpolação dos parâmetros de um modelo de 1ª Ordem. Para instrumentação, são utilizados os sensores LM35, já disponíveis na planta, e seis Circuitos Termopares, desenvolvidos neste trabalho. Para o acionamento é utilizado o controle por ciclos, desenvolvido em parceria com o colega Nelson de Figueiredo Barros em seu Trabalho de Conclusão de Curso intitulado *Instrumentação Virtual aplicada à automação de um Sistema Térmico para levantamento de características e teste de Controladores Via Web*. Além disso, é proposto um controlador PI para a planta. Este trabalho também trata a dinâmica da transferência de calor através do acrílico, maior responsável pela dinâmica total da planta.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais; Modelagem Matemática; Controle Térmico; Termopar; Controle de Ciclos; Controlador PI.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xxi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Relevância . . . . .	1
1.2 Motivação . . . . .	1
1.3 Definição do problema . . . . .	2
1.4 Objetivos . . . . .	2
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>3</b>
2.1 Modelagem Matemática . . . . .	3
2.2 Equações Diferenciais Parciais (EDPs) . . . . .	4
2.3 Método de Separação das Variáveis . . . . .	5
2.4 Transferência de Calor . . . . .	8
2.4.1 Condução de Calor na Parede Plana sem Geração de Energia . . . . .	8
2.4.2 Resistência Térmica . . . . .	10
2.5 Teoria dos Termopares . . . . .	11
2.6 O Método da Resposta Complementar . . . . .	12
2.7 Método da Síntese Direta . . . . .	14
<b>3 Descrição da Planta</b>	<b>17</b>
3.1 Introdução . . . . .	17
3.2 Acionamento . . . . .	19
3.2.1 Alimentação . . . . .	19
3.2.2 Controle por Ciclos . . . . .	21
3.3 Instrumentação . . . . .	22
3.3.1 Circuito Termopar . . . . .	22
3.3.2 Sensores LM35 . . . . .	30
3.3.3 Medindo o Fluxo de ar . . . . .	34
3.4 Dimensões da planta . . . . .	35

<b>4</b>	<b>Ensaio Realizado no Sistema</b>	<b>37</b>
4.1	Identificando o Comportamento da Planta . . . . .	37
4.2	Dinâmica do Acrílico . . . . .	41
4.3	A Equação Tratada . . . . .	44
4.4	Simulando a Equação . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Modelagem a Parâmetros Concentrados</b>	<b>49</b>
5.1	Justificativa . . . . .	49
5.2	Obtenção dos Modelos . . . . .	49
5.3	Interpolação dos Parâmetros . . . . .	55
5.4	Simulação e Comparação do Modelo . . . . .	57
5.5	Projeto do Controlador . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>67</b>
6.1	Discussão dos Resultados . . . . .	67
6.2	Perspectivas . . . . .	67
<b>A</b>	<b>O Circuito Termopar</b>	<b>69</b>
<b>B</b>	<b>Algoritmos</b>	<b>71</b>
B.1	Dinâmica do Acrílico . . . . .	71
B.2	Obtenção do Modelo através das EDPs . . . . .	74
B.3	Degrau na Planta 21/01/2014 . . . . .	76
B.4	Obtenção dos Modelos de 1ª Ordem . . . . .	80
B.5	Comparação dos Modelos de 1ª Ordem . . . . .	85
B.6	Projeto do Controlador . . . . .	88
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>

# Lista de Figuras

2.1	Ciclo de Modelagem. . . . .	3
2.2	Dinâmica da propagação de calor em uma barra. . . . .	7
2.3	Dinâmica da propagação de calor em uma barra. . . . .	8
2.4	Transferência de Calor através de uma parede plana. Fonte: <a href="http://www.demec.ufmg.br/">http://www.demec.ufmg.br/</a> . . . . .	9
2.5	Analogia entre a resistência térmica e a resistência elétrica. Fonte: <a href="http://www.demec.ufmg.br/">http://www.demec.ufmg.br/</a> . . . . .	10
2.6	Configuração básica de um termopar. Fonte: <a href="http://withfriendship.com/">http://withfriendship.com/</a> . . . . .	11
2.7	Compensação de um termopar. Fonte: <a href="http://www.msm.cam.ac.uk/">http://www.msm.cam.ac.uk/</a> . . . . .	12
2.8	Resposta de um sistema de 1ª Ordem ao Degrau Unitário. . . . .	13
2.9	Método da Resposta Complementar. . . . .	14
3.1	Seções da Planta. . . . .	18
3.2	Distribuição dos sensores e atuadores na planta. . . . .	18
3.3	Relés de Estado Sólido. . . . .	19
3.4	Diagrama Elétrico das Resistências: a) Sem Ligação; b) Ligação em Paralelo; c) Ligação em Série. . . . .	20
3.5	Multímetro Digital e Alicata Amperímetro utilizados na obtenção da Potência Máxima. . . . .	21
3.6	Sinal enviado ao relé - 50% da potencia máxima. . . . .	22
3.7	Circuitos Termopares . . . . .	23
3.8	Termômetro Digital e sonda para fluxo de ar utilizados na calibração. . . . .	24
3.9	Resposta dos termopares a um degrau de 40% na Resistência 1 . . . . .	25
3.10	Calibração Estática do Termopar 1 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	26
3.11	Calibração Estática do Termopar 2 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	27
3.12	Calibração Estática do Termopar 3 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	27
3.13	Calibração Estática do Termopar 4 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	28
3.14	Calibração Estática do Termopar 5 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	28
3.15	Calibração Estática do Termopar 6 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração	29
3.16	Disposição dos Termopares na planta. . . . .	30
3.17	Calibração Estática do Sensor LM35 1 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração . . . . .	31

3.18	Calibração Estática do Sensor LM35 2 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração . . . . .	32
3.19	Calibração Estática do Sensor LM35 3 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração . . . . .	32
3.20	Calibração Estática do Sensor LM35 4 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração . . . . .	33
3.21	Calibração Estática do Sensor LM35 5 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração . . . . .	33
3.22	Anemômetro digital utilizado para medir a velocidade do fluxo de ar. . . . .	34
3.23	Dimensões reais da planta. . . . .	35
4.1	Resposta dos Sensores LM35 a uma sequência de degraus. . . . .	38
4.2	Detalhe do sinal do Sensor LM35 2. . . . .	39
4.3	Resposta dos Termopares a uma sequência de degraus. . . . .	39
4.4	Filtros aplicados ao sinal do Termopar 1. . . . .	40
4.5	Resposta filtrada dos Termopares a uma sequência de degraus. . . . .	41
4.6	Diferença entre as temperaturas interna e externa do acrílico ao longo da planta. . . . .	42
4.7	Degrau no acrílico localizado na Seção 3 da planta. . . . .	43
4.8	Método da Resposta Complementar - Acrílico. . . . .	43
4.9	Modelo obtido e Dinâmica real do Acrílico. . . . .	44
4.10	Simulação da Planta. . . . .	46
4.11	Resposta da Planta. . . . .	47
5.1	Resposta dos Sensores LM35 ao degrau. . . . .	50
5.2	Reta ajustada para o Sensor LM35 2. . . . .	51
5.3	Reta ajustada para o Sensor LM35 3. . . . .	51
5.4	Reta ajustada para o Sensor LM35 4. . . . .	52
5.5	Reta ajustada para o Sensor LM35 5. . . . .	52
5.6	Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 2. . . . .	53
5.7	Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 3. . . . .	54
5.8	Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 4. . . . .	54
5.9	Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 5. . . . .	55
5.10	Curva ajustada para o parâmetro $K$ . . . . .	56
5.11	Curva ajustada para o parâmetro $\theta$ . . . . .	56
5.12	Curva ajustada para o parâmetro $\tau$ . . . . .	57
5.13	Interpolação das Condições Iniciais. . . . .	58
5.14	Simulação do Modelo. . . . .	59
5.15	Resposta do Sistema. . . . .	59
5.16	Medições feitas pelos Sensores LM35. . . . .	60
5.17	Medições feitas pelos Circuitos Termopares. . . . .	61
5.18	Comparação do Modelo de 1ª Ordem na posição $x=138\text{cm}$ . . . . .	61
5.19	Comparação do Modelo de 1ª Ordem na posição $x=330\text{cm}$ . . . . .	62
5.20	Comparação do Modelo de 1ª Ordem na posição $x=920\text{cm}$ . . . . .	62

5.21	Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada (posição $x=138\text{cm}$ ). . . . .	63
5.22	Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada (posição $x=330\text{cm}$ ). . . . .	64
5.23	Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada (posição $x=920\text{cm}$ ). . . . .	64
5.24	Estrutura do Controlador Proposto. . . . .	65
A.1	Configuração adotada para o CI AD594AQ - Fonte: Datasheet do CI AD594AQ	69
A.2	Diagrama elétrico do Circuito Termopar . . . . .	70



# Lista de Tabelas

3.1	Potência Máxima fornecida por cada Resistência . . . . .	20
3.2	Calibração dos Termopares ( $T(v_t) = av_t + b$ ) . . . . .	26
3.3	Calibração dos Sensores LM35 ( $T(v_t) = av_t + b$ ) . . . . .	31
5.1	Ganhos e Atrasos concentrados. . . . .	50
5.2	Constates de tempo concentradas. . . . .	53
5.3	Localização das pontas dos Circuitos Termopares. . . . .	60

# Introdução

## 1.1 Relevância

A modelagem matemática é uma área de vital importância em todas as Engenharias, principalmente quando se tem por objetivo o controle de determinado processo. Várias técnicas de modelagem foram desenvolvidas e são aplicadas na indústria para projetar controladores para os mais variados tipos de processo. Na maioria deles, o modelo é satisfatório quando descreve sua dinâmica em determinado ponto, variando apenas no tempo, como por exemplo, o nível em um tanque. Esses processos são tratados de forma puntual.

Entretanto, existem processos nos quais é necessário inserir outra variável, em geral o espaço. Processos que envolvam eletrostática, eletrodinâmica, eletromagnetismo, dinâmica dos fluidos, difusão do calor ou propagação de ondas são apenas alguns, dos muitos exemplos, de sistemas que necessitam de outra variável além do tempo. Tais sistemas devem ser modelados a parâmetros distribuídos, ou seja, considerando a variação no tempo e no espaço.

A aplicação de modelagem a parâmetros distribuídos ainda está sendo difundida, embora já haja literatura disponível. O presente trabalho possibilita a aplicação de técnicas de modelagem a parâmetros distribuídos em uma planta física e a avaliação dessas técnicas. O conhecimento aqui produzido poderá ser utilizado como auxílio aos discentes do curso de Engenharia Mecatrônica, em especial nas disciplinas do eixo de Modelagem e Controle de Processos.

## 1.2 Motivação

A motivação para a escolha do tema partiu, a princípio, da afinidade que tenho com a Matemática. O meu gosto por esta arte foi cultivado durante duas Iniciações Científicas que fiz, ainda no 2º grau, pela OBMEP, sendo que foi durante uma dessas iniciações que tomei conhecimento do curso de graduação em Engenharia Mecatrônica.

Já no início da graduação, mais especificamente no 2º período, passei a estudar Equações Diferenciais antes do resto da turma, sob orientação do Prof. Rônei Sandro Vieira, visando uma possível Iniciação Científica na área. No 3º período, como bolsista da Fapemig, comecei uma Iniciação Científica sob orientação do Prof. Valter Júnior de Sousa Leite, meu orientador neste trabalho, e co-orientação do Prof. Rônei.

Enquanto cursava as disciplinas do eixo de Modelagem e Controle de Processos, meu fascínio pela Matemática Aplicada aumentava, e a admiração pelas matérias daquele eixo, em especial às que tratavam de análise, também crescia. A idéia de poder equacionar todo e qualquer sistema, podendo em seguida manipular o mesmo, me inspirava a continuar aprimorando meus conhecimentos.

Durante um trabalho da disciplina de Robótica Industrial, no qual toda a turma foi dividida em equipes, fiz parte da equipe de Modelagem e Simulação. Este último foi crucial para a escolha deste tema para meu Trabalho de Conclusão de Curso.

### 1.3 Definição do problema

Modelar um sistema a parâmetros distribuídos significa obter um modelo que descreva o comportamento de tal sistema ao longo de duas variáveis. Em geral, tratando de problemas físicos, essas variáveis são o tempo ( $t$ ) e o espaço ( $x$ ). Esse modelo é composto por Equações Diferenciais Parciais (EDPs), além de vários parâmetros a serem definidos durante a modelagem.

Neste trabalho é proposto a modelagem a parâmetros distribuídos de uma planta de aquecimento de ar, do tipo forno em tubo, com paredes de acrílico. Para tanto, será necessário um estudo sobre a dinâmica de transferência de calor através do acrílico.

### 1.4 Objetivos

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem por objetivo principal obter um modelo a parâmetros distribuídos para uma planta de aquecimento de ar, do tipo forno em tubo, desenvolvida por (Simeão [2009]).

Como objetivo secundário espera-se projetar um controlador para essa planta que a deixe pelo menos duas vezes mais rápida e com erro nulo em regime permanente. Para tanto, será utilizada uma simplificação do modelo a parâmetros distribuídos obtido.

## Fundamentação Teórica

### 2.1 Modelagem Matemática

Modelagem Matemática é o equacionamento de determinada dinâmica, onde se *matematicaliza* um sistema físico para compreender e controlar seu comportamento.

(Barbosa [2004]) entretanto, define Modelagem como algo mais abrangente. O autor critica a visão sobre o tema como uma simples aplicação da matemática em outras áreas do conhecimento, e afirma que a Modelagem Matemática é *um grande 'guarda-chuva', onde cabe quase tudo*. Para ele o ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação, não se limitando a uma simples ferramenta matemática.

(BRONSON and COSTA [2008]) apresentam o "Ciclo de Modelagem", no qual são propostos os três estágios da modelagem e os respectivos percursos de um estágio a outro. A **Figura 2.1** ilustra este ciclo.

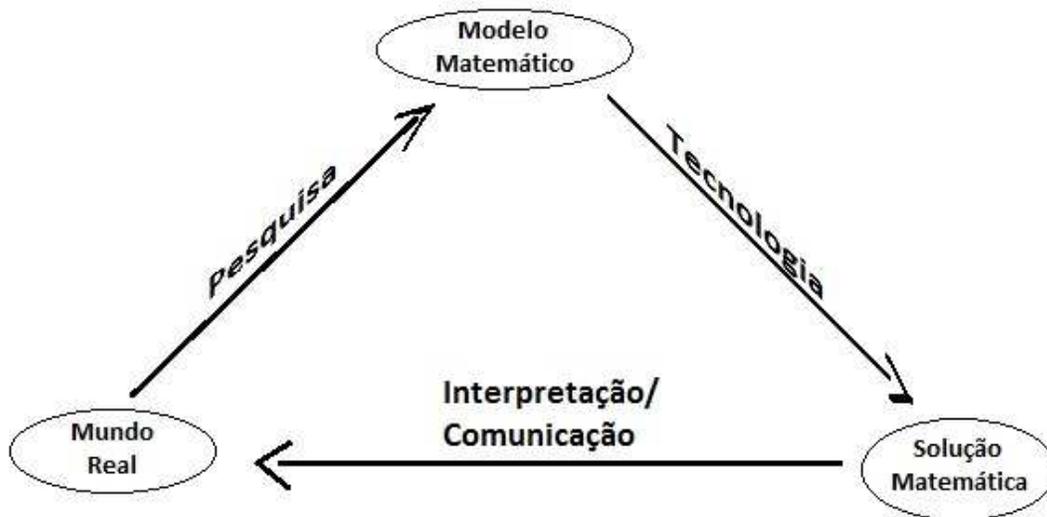


Figura 2.1: Ciclo de Modelagem.

A **Figura 2.1** deixa claro que, quando se modela algum sistema, deve-se partir do

mundo real, ou seja, do sistema físico, e, através de um estudo ou *Pesquisa*, chegar ao modelo matemático do sistema. Obtido o modelo matemático, utilizam-se de técnicas analíticas ou numéricas, ou ainda de *Tecnologia*, para chegar a uma solução numérica do modelo. Por fim, essa solução numérica pode ser *Interpretada*, quando o objetivo é apenas a análise do sistema, e até *Comunicar* com o mundo real, no caso o sistema físico tratado, quando se deseja controlar o mesmo.

Um modelo matemático é obtido considerando vários parâmetros físicos do sistema em questão. Um sistema pode possuir uma infinidade desses parâmetros, portanto, uma modelagem que descreva seu comportamento exato se torna inviável. O que é feito na prática, é uma simplificação do processo estudado, considerando apenas os parâmetros mais relevantes à sua dinâmica. Por exemplo, para obter um modelo de um pêndulo invertido pode-se desconsiderar a resistência do ar. Neste sentido, modelar um sistema demanda um estudo dos parâmetros e variáveis de interesse.

Os modelos matemáticos são compostos por Equações Diferenciais (EDs), ou seja, equações que relacionam alguma função  $f$  com uma ou mais de suas derivadas. As EDs utilizadas nos modelos podem ser de vários tipos, dentre elas Ordinárias, Funcionais, Parciais, etc. Neste trabalho são utilizadas Equações Diferenciais Parciais, conforme explicado a seguir.

## 2.2 Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) se caracteriza por possuir mais de uma variável independente e uma variável dependente. Além disso, a EDP relaciona a variável dependente com suas derivadas parciais em relação às variáveis independentes. Sendo assim, uma EDP tem a seguinte forma:

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2} \partial y^2}, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y}, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^2 \partial y^{n-2}}, \frac{\partial^n u}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) = G, \quad (2.1)$$

em que  $u$  é a variável dependente,  $x$  e  $y$  são as variáveis independentes e  $G$  é uma constante. Derivar uma função parcialmente em relação a uma determinada variável consiste em considerar as demais variáveis do sistema como constantes.

Uma EDP é classificada quanto à sua ordem de acordo com ordem da mais alta derivada encontrada na equação ( $n$ ). Sendo assim, uma EDP de 2ª Ordem possui a seguinte forma:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G. \quad (2.2)$$

Se  $G=0$ , então a EDP é dita homogênea, e, em caso contrário, é dita não-homogênea.

(Zill and Cullen [2001]) apresenta ainda três classificações para as EDPs de 2ª Ordem com coeficientes constantes, quais sejam:

hiperbólica  $\Rightarrow B^2 - 4AC > 0$ ;

parabólica  $\Rightarrow B^2 - 4AC = 0$ ; e

$$\text{elíptica} \Rightarrow B^2 - 4AC < 0.$$

O autor reforça que o motivo de classificar as EDPs dessa forma é que deseja-se resolver tais equações sujeitas a certas condições laterais conhecidas como condições de contorno e condições iniciais. Desta forma, o tipo das condições laterais da equação depende do fato de ser a equação hiperbólica, parabólica ou elíptica. A grosso modo, tal classificação está relacionada à superfície formada pela solução da EDP.

Como exemplo, pode-se citar a Equação da Onda como uma equação hiperbólica, a Equação do Calor como uma equação parabólica, e a Equação de Laplace como uma equação elíptica, as quais são apresentadas, respectivamente, a seguir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.5)$$

Na Equação do Calor, dada pela **Figura 2.4**, o termo  $\kappa$  é uma constante positiva denominada difusividade térmica. Vale ressaltar que a equação aqui denominada Equação do Calor modela a transferência de calor em uma haste ou fio delgado, o que não é o caso da planta utilizada neste trabalho, motivo pelo qual será utilizada outra equação, mais compatível com o sistema em questão.

Pode-se perceber que os exemplos acima são equações diferenciais parciais homogêneas, ou ainda, equações diferenciais parciais separáveis. Um método analítico muito utilizado para solucionar EDPs, denominado *Método de Separação das Variáveis*, utiliza esse conceito. Tal método é apresentado a seguir.

## 2.3 Método de Separação das Variáveis

O Método de Separação das Variáveis pode ser aplicado a EPDs homogêneas e separáveis, ou seja, em equações onde seja possível separar as duas variáveis em termos distintos, e tem por objetivo obter soluções particulares destas EDPs. Uma explicação teórica mais completa pode ser vista em (Zill and Cullen [2001]). Já exemplos de aplicação desse método estão disponíveis em (Simmons and Krantz [2008]).

Tal método consiste reduzir uma EDP, de duas variáveis, a duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Para tanto, a solução particular da EDP em questão será considerada como um produto de duas funções, cada uma dependente apenas de uma das duas variáveis da EDP, ou seja,

$$u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (2.6)$$

logo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dX(x)}{dx} Y(y), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y(y), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = X(x) \frac{dY(y)}{dy}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}. \quad (2.10)$$

A título de exemplificação, considere a Equação do Calor já citada anteriormente. Essa equação é uma EDP dependente de duas variáveis  $x$  e  $t$ , e tem a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.11)$$

Supondo  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , a equação pode ser reescrita como

$$X(x) \frac{dT(t)}{dt} = \kappa \frac{d^2 X(x)}{dx^2} T(t). \quad (2.12)$$

A fim de facilitar a demonstração do método, considere, para fins de notação,

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \ddot{X}, \quad \frac{dT(t)}{dt} = \dot{T}. \quad (2.13)$$

Rearranjando os termos da equação, temos

$$\frac{\dot{T}}{T} = \kappa \frac{\ddot{X}}{X}. \quad (2.14)$$

Como o membro da esquerda da equação acima é independente de  $x$  e é igual ao membro direito, que por sua vez é independente de  $t$ , concluímos que ambos os membros são independentes de  $x$  e  $t$ . Portanto, cada membro da equação é uma constante. Essa constante é denominada constante real de separação, e será representada por  $a$ . Logo, temos a equação

$$\frac{\dot{T}}{T} = \kappa \frac{\ddot{X}}{X} = a. \quad (2.15)$$

que conduzem a duas EDOs, quais sejam:

$$\ddot{X} - \frac{a}{\kappa} X = 0, \quad (2.16)$$

$$\dot{T} - aT = 0. \quad (2.17)$$

A forma das soluções particulares das equações acima dependem do valor de  $a$ . (Zill and Cullen [2001]) demonstra que para  $a \geq 0$  a EDP, quando associada a um problema de valor de contorno, possui apenas a solução trivial. Portanto, supondo  $a < 0$ , temos que as soluções das equações acima podem ser dadas por

$$X = c_1 \cos(\sqrt{-a/\kappa}x) + c_2 \sin(\sqrt{-a/\kappa}x), \quad (2.18)$$

e

$$T = c_3 e^{at}, \quad (2.19)$$

em que  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são constantes a serem determinadas. Portanto, a solução da EDP que modela a transferência de calor em uma haste ou fio delgado é dada por

$$u(x, t) = c_1 c_3 e^{at} \cos(\sqrt{-a/\kappa}x) + c_2 c_3 e^{at} \sin(\sqrt{-a/\kappa}x). \quad (2.20)$$

Com o auxílio do *MatLab*, aplica-se a solução obtida acima em um problema de valor de contorno, no qual deseja-se obter a dinâmica da propagação de calor em uma barra de comprimento  $L = \pi$  e  $\kappa = 1$  com as condições de contorno

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t > 0, \quad (2.21)$$

$$u(x, 0) = 100, 0 \leq x \leq L. \quad (2.22)$$

Neste problema, no instante inicial, toda a barra estará com temperatura de 100 (não necessariamente °C) e, iniciada a dinâmica, suas duas extremidades estarão à temperatura constante de 0. Como resultado obtem-se a **Figura 2.2**, na qual pode-se verificar a dinâmica da propagação do calor ao longo do tempo e do espaço. A **Figura 2.3** ilustra a variação da temperatura ao longo da barra para vários instantes de tempo.

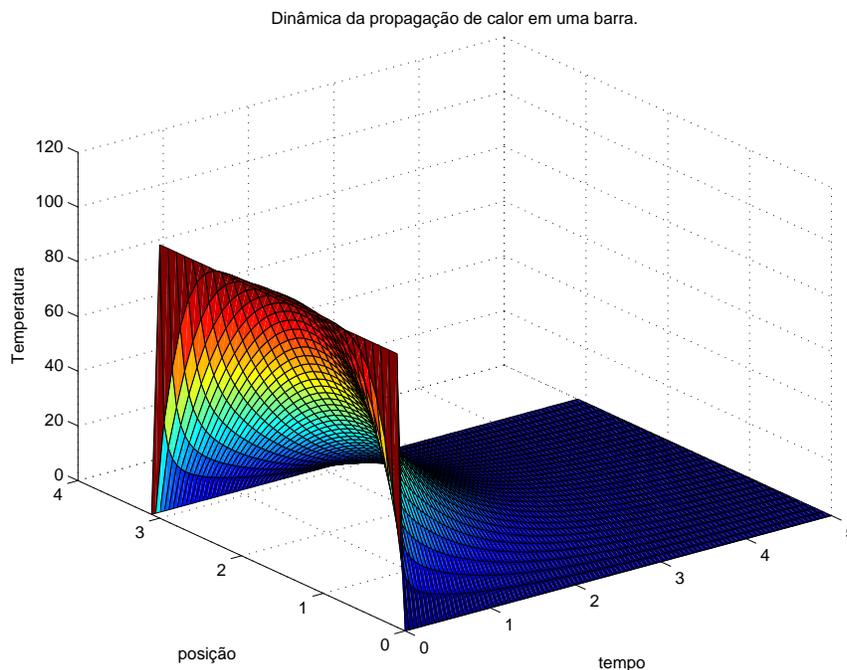


Figura 2.2: Dinâmica da propagação de calor em uma barra.

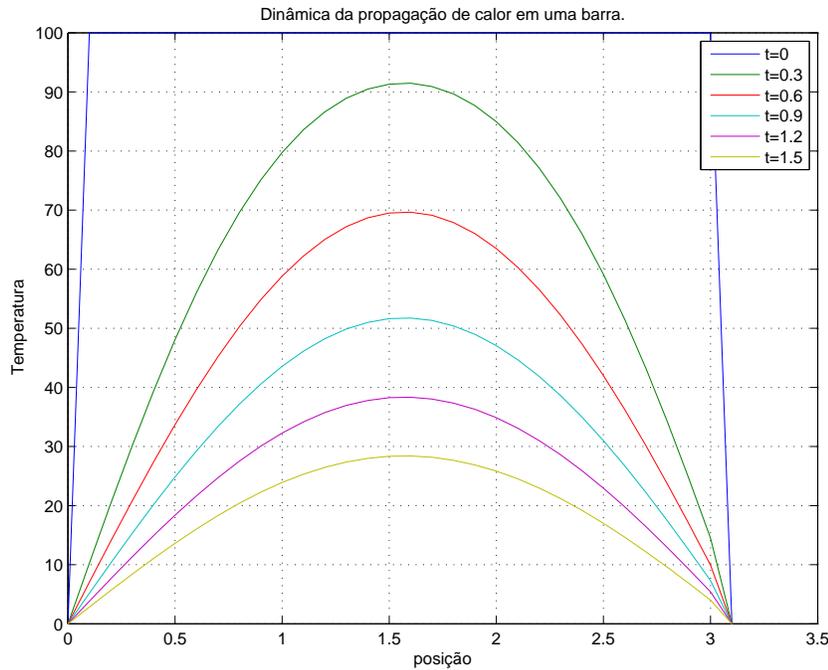


Figura 2.3: Dinâmica da propagação de calor em uma barra.

## 2.4 Transferência de Calor

O processo de transferência de calor é composto por três mecanismos: radiação, condução e convecção. Neste trabalho serão consideradas apenas a condução de calor através do acrílico e a convecção do ar no interior do forno, haja vista serem estas as responsáveis pela dinâmica lenta da planta. Uma explicação mais detalhada sobre Condução Unidimensional de Calor em Regime Permanente pode ser vista em (Incropera et al. [2013]).

### 2.4.1 Condução de Calor na Parede Plana sem Geração de Energia

Como já foi citado, a equação que descreve a condução unidimensional do calor em uma barra é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.23)$$

em que  $T$  é a temperatura,  $t$  é o tempo e  $x$  é a posição ao longo da espessura da parede.  $\kappa$ , conforme já dito, é uma constante positiva denominada condutividade térmica, e é específica para cada material.

Essa mesma equação pode ser utilizada para descrever a condução de calor em uma parede plana de área  $A$  e espessura  $L$ . A **Figura 2.4** ilustra esse problema.

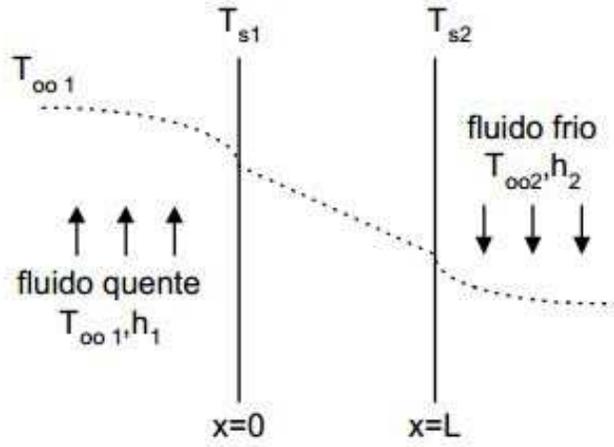


Figura 2.4: Transferência de Calor através de uma parede plana. Fonte: <http://www.demec.ufmg.br/>

Na **Figura 2.4**,  $T_{\infty 1}$ ,  $T_{s1}$ ,  $T_{s2}$  e  $T_{\infty 2}$  são, respectivamente, as temperaturas do fluido quente, da superfície 1, da superfície 2 e do fluido frio, enquanto  $h_1$  e  $h_2$  são os *coeficientes de transferência térmica*, dados em  $W/(m^2K)$ , dos fluidos quente e frio, respectivamente.

Considerando o processo em regime permanente, temos que a equação da condução de calor fica reduzida a

$$0 = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.24)$$

A solução dessa equação é dada por

$$T(x) = C_1 x + C_2, \quad (2.25)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a se determinar.

Utilizando as condições de contorno

$$T(0) = T_{s1}, \quad (2.26)$$

e

$$T(L) = T_{s2}, \quad (2.27)$$

a solução geral da equação é dada por

$$T(x) = (T_{s2} - T_{s1}) \frac{x}{L} + T_{s1}. \quad (2.28)$$

A partir desse resultado, (Incropera et al. [2013]) ressaltam que "para a condução unidimensional em regime estacionário em uma parede plana sem geração de calor e com condutividade térmica constante, a temperatura varia linearmente com  $x$ ." Essa observação será importante mais a frente, quando for apresentada a dinâmica térmica do acrílico.

Combinando a lei de Fourier com a solução obtida acima, podem-se determinar a taxa de transferência de calor ( $q_x$ ) como sendo

$$q_x = -\kappa A \frac{dT}{dx} = \frac{\kappa A}{L} (T_{s1} - T_{s2}). \quad (2.29)$$

Por fim, encontra-se o fluxo térmico, ou seja, a taxa de transferência de calor por unidade de área, qual seja

$$\dot{q}_x = \frac{q_x}{A} = \frac{\kappa}{L} (T_{s1} - T_{s2}). \quad (2.30)$$

## 2.4.2 Resistência Térmica

Uma forma simples de analisar a transferência de calor é introduzir o conceito de *resistência térmica* ( $R_t$ ). A resistência térmica, assim como a resistência elétrica, é definida como a razão entre um potencial motriz e a correspondente taxa de transferência. No caso da resistência térmica o potencial motriz é a diferença de temperatura, enquanto que a taxa de transferência é a própria taxa de transferência de calor. A **Figura 2.5** ilustra a analogia entre a resistência térmica e a resistência elétrica.

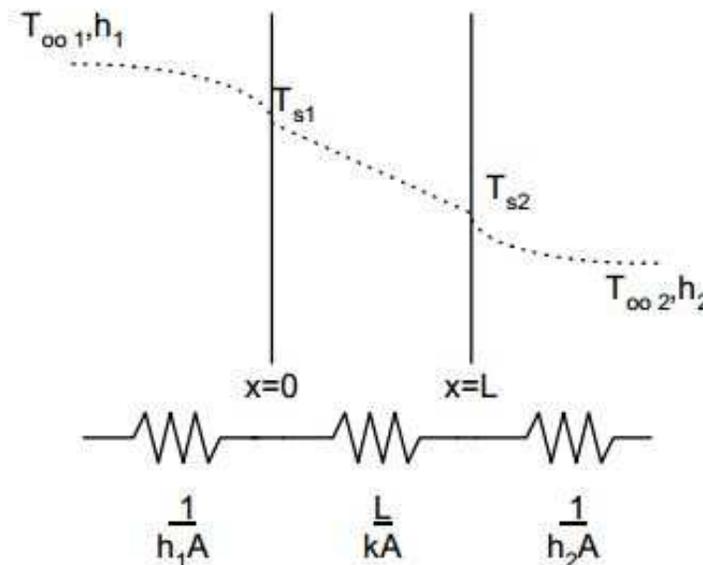


Figura 2.5: Analogia entre a resistência térmica e a resistência elétrica. Fonte: <http://www.demec.ufmg.br/>

Dessa forma, em uma parede plana de área  $A$  e espessura  $L$ , a resistência térmica para condução e para convecção são, respectivamente,

$$R_{t,cond} = \frac{(T_{s1} - T_{s2})}{q_x} = \frac{L}{\kappa A}, \quad (2.31)$$

e

$$R_{t,conv} = \frac{(T_s - T_\infty)}{q} = \frac{1}{hA}, \quad (2.32)$$

em que  $T_s$  é a temperatura da superfície,  $T_\infty$  é a temperatura do fluido e  $q$  é a taxa de transferência de calor por convecção.

É importante ressaltar que no exemplo da **Figura 2.5**,  $q_x$  e  $q$  são iguais devido à conservação do fluxo. Essa consideração será utilizada no estudo da dinâmica térmica do acrílico.

## 2.5 Teoria dos Termopares

Um Termopar é um sensor térmico de contato constituído basicamente por dois filamentos de metais distintos unidos por uma de suas extremidades. A variação de temperatura entre as extremidades do termopar gera um pequeno potencial elétrico, em geral  $\mu V$ . A **Figura 2.6** ilustra a configuração básica de um termopar.

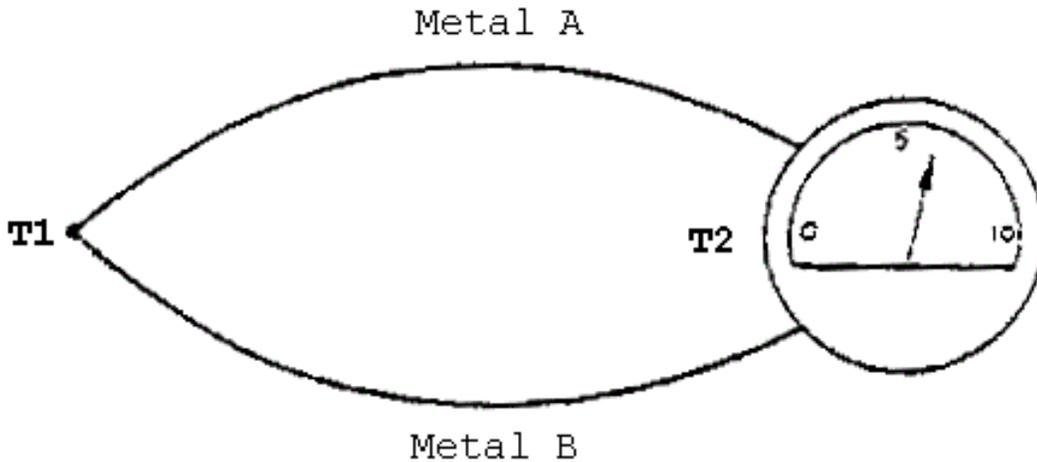


Figura 2.6: Configuração básica de um termopar. Fonte: <http://withfriendship.com/>

O efeito que rege a relação entre a variação de temperatura e o potencial elétrico gerado em um termopar é conhecido como *Efeito de Seebeck*, em homenagem a Thomas Seebeck, físico alemão que, em 1822, descobriu acidentalmente esse fenômeno termoelétrico. (Doebelin [1990]) explica que o potencial elétrico gerado em um termopar é proporcional à variação de temperatura de suas as extremidades, independente da variação de temperatura ao longo do mesmo.

Como o termopar mede uma diferença de temperatura e não a temperatura real da superfície em questão, usa-se geralmente uma temperatura de referência,  $0^{\circ}\text{C}$  por exemplo. Essa abordagem consiste em manter a extremidade que está em aberto a uma temperatura constante. Dessa forma, para se ter a temperatura da superfície em  $^{\circ}\text{C}$ , basta inserir a extremidade que está em aberto dentro de um balde com água e gelo, desde que haja um isolamento elétrico adequado. A **Figura 2.7** ilustra este caso.

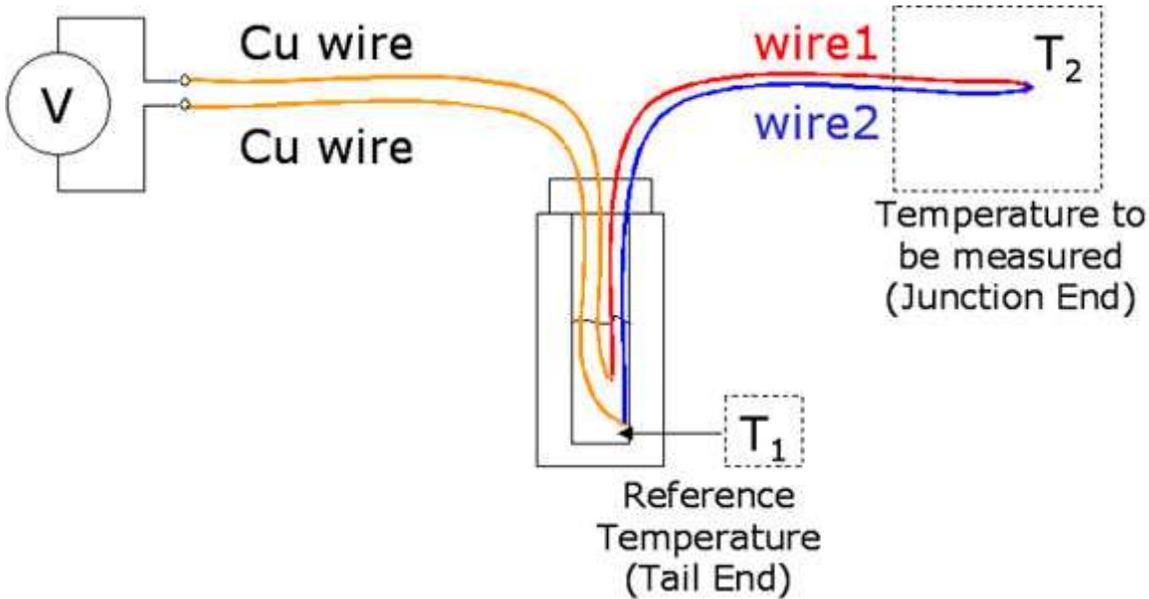


Figura 2.7: Compensação de um termopar. Fonte: <http://www.msm.cam.ac.uk/>

Como a tensão retornada pelo termopar é muito baixa (da ordem de  $\mu\text{V}$ ), são utilizados CIs que amplificam o sinal medido. Em alguns CIs, como no caso do AD594AQ utilizado neste trabalho, é disponibilizada a compensação em  $0^{\circ}\text{C}$ .

Em geral esses sensores são amplamente utilizados na indústria por serem simples, robustos e de baixo custo.

## 2.6 O Método da Resposta Complementar

O Método da Resposta Complementar é um método de identificação simples para se obter modelos de baixa ordem. Considere o sistema de 1<sup>a</sup> Ordem descrito pela **Equação 2.33**.

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau s + 1}. \quad (2.33)$$

A descrição correspondente no domínio do tempo é dada por

$$y(t) = K(1 - e^{-(t-\theta)/\tau})u(t), \quad (2.34)$$

em que  $y(t)$  é o sinal de saída e  $u(t)$  é o sinal de entrada.

A resposta desse sistema a uma entrada em degrau unitário, com  $K = 1$ ,  $\theta = 0$ , 2 e  $\tau = 0, 25$ , é ilustrada na **Figura 2.8**

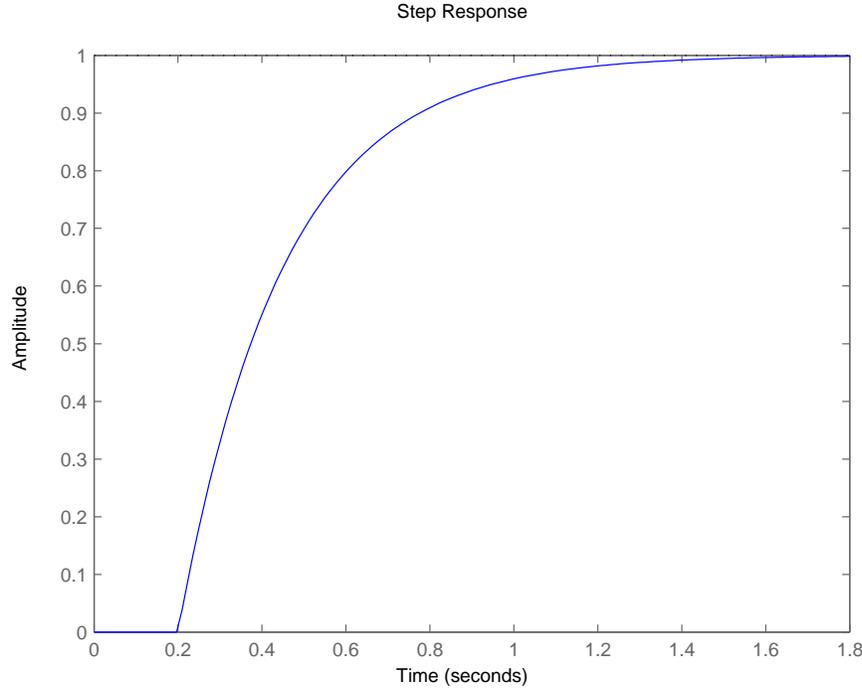


Figura 2.8: Resposta de um sistema de 1ª Ordem ao Degrau Unitário.

O ganho  $K$  do sistema é a razão entre a variação do sinal de saída e a variação do sinal de entrada, ou seja,

$$K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}. \quad (2.35)$$

O termo  $\theta$  é o atraso do sistema e pode ser obtido visualmente após a aplicação de uma entrada em degrau, por exemplo.

Agora, seja  $y(\infty)$  o valor de acomodação do sinal de saída. Logo, substituindo  $y(\infty)$  na **Equação 2.34** e subtraindo  $y(t)$ , temos

$$y(\infty) - y(t) = K(1 - e^{-\infty/\tau})u(t) - K(1 - e^{-t/\tau})u(t), \quad (2.36)$$

que por sua vez pode ser reduzido a

$$y(\infty) - y(t) = Ke^{-t/\tau}u(t). \quad (2.37)$$

Com algumas transformações chega-se a

$$\ln\left(\frac{y(\infty) - y(t)}{Ku(t)}\right) = \frac{-1}{\tau}t. \quad (2.38)$$

Plotando o 1º termo da **Equação 2.38** em função de  $t$ , obtém-se uma curva que, para os primeiros valores de  $t$ , será uma reta de inclinação  $\frac{-1}{\tau}$ .

$\tau$ , então, é obtido por meio de um ajuste de curva na parte deste gráfico que se assemelha a uma reta. A **Figura 2.9** ilustra um exemplo desse gráfico e a respectiva reta ajustada.

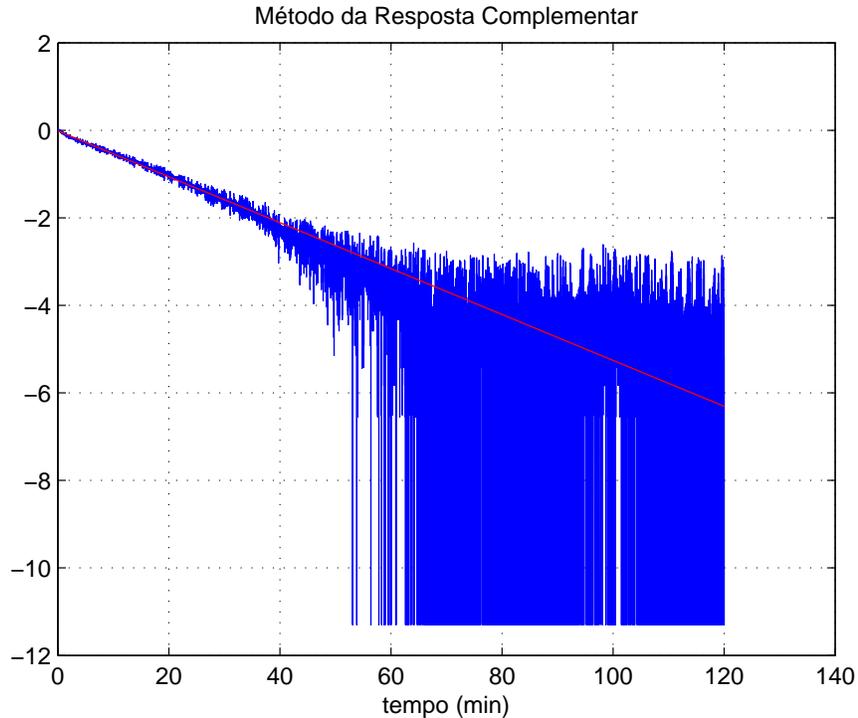


Figura 2.9: Método da Resposta Complementar.

Logo, obtido  $K$  por meio da **Equação 2.35**,  $\theta$  obtido visualmente e  $\tau$  obtido por meio da inclinação da reta ajustada, temos o modelo de 1ª Ordem descrito pela **Equação 2.33**.

## 2.7 Método da Síntese Direta

O Método da Síntese Direta é um método simples utilizado para síntese de controladores PI (Proporcional-Integral).

Suponha o modelo de 1ª Ordem com atraso descrito pela **Equação 2.39**

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s}. \quad (2.39)$$

O Método da Síntese Direta força a malha fechada da planta a ser

$$G_{MF}(s) = \frac{1}{\tau_d s + 1} e^{-\theta_d s}, \quad (2.40)$$

em que  $\tau_d$  é a constante de tempo desejada, através da qual se determina o quão mais rápida será a dinâmica do sistema controlado, e  $\theta_d$  é o atraso desejado, o qual deve ser maior ou igual ao atraso real.

Sendo assim, o controlador que resulta na função transferência descrita pela **Equação 2.40**, para o sistema em malha fechada, é

$$G_c(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{e^{-\theta_d s}}{\tau_d s + 1 - e^{-\theta_d s}} = \frac{\tau s + 1}{K(\tau_d s + 1 - e^{-\theta_d s})}. \quad (2.41)$$

Utilizando a série de Taylor truncada em seu termo de 1ª Ordem, temos que

$$e^{-\theta_d s} = 1 - \theta_d s. \quad (2.42)$$

Logo, substituindo na **Equação 2.41**, temos que o controlador a ser obtido é dado por

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{K(\tau_d + \theta_d)s}. \quad (2.43)$$



## Descrição da Planta

### 3.1 Introdução

A planta utilizada neste trabalho foi desenvolvida por Juliano Daniel Simeão, em seu trabalho *Controle de Sistemas com Atraso nos estados: Uma abordagem convexa* (Simeão [2009]). Essa planta consiste em um túnel de acrílico por onde o ar circula insuflado por um ventilador axial, sendo o ar aquecido por três resistências distribuídas ao longo da planta e sujeito à ação de uma válvula de controle de fluxo. Esse tubo de acrílico possui seção transversal de  $100\text{mm} \times 100\text{mm}$  e parede com espessura de  $5\text{mm}$ , e é dividido em 9 seções de trabalho, quais sejam:

- Seção 1: Entrada de ar forçado por um ventilador axial e sensor de temperatura;
- Seção 2: Resistência elétrica para aquecimento do ar e sensor de temperatura;
- Seção 3: Restrição para controle de fluxo;
- Seção 4: Sensor de temperatura;
- Seção 5: Resistência elétrica para aquecimento do ar;
- Seção 6: Sensor de temperatura;
- Seção 7: Resistência elétrica para aquecimento do ar;
- Seção 8: Não utilizada;
- Seção 9: Sensor de temperatura e saída do fluxo de ar;

A **Figura 3.1** ilustra as seções descritas acima.

A temperatura do ar é medida por meio de 5 sensores LM35 instalados em pontos distintos. A **Figura 3.2** ilustra a referida planta bem com a distribuição dos sensores e atuadores ao longo da mesma.

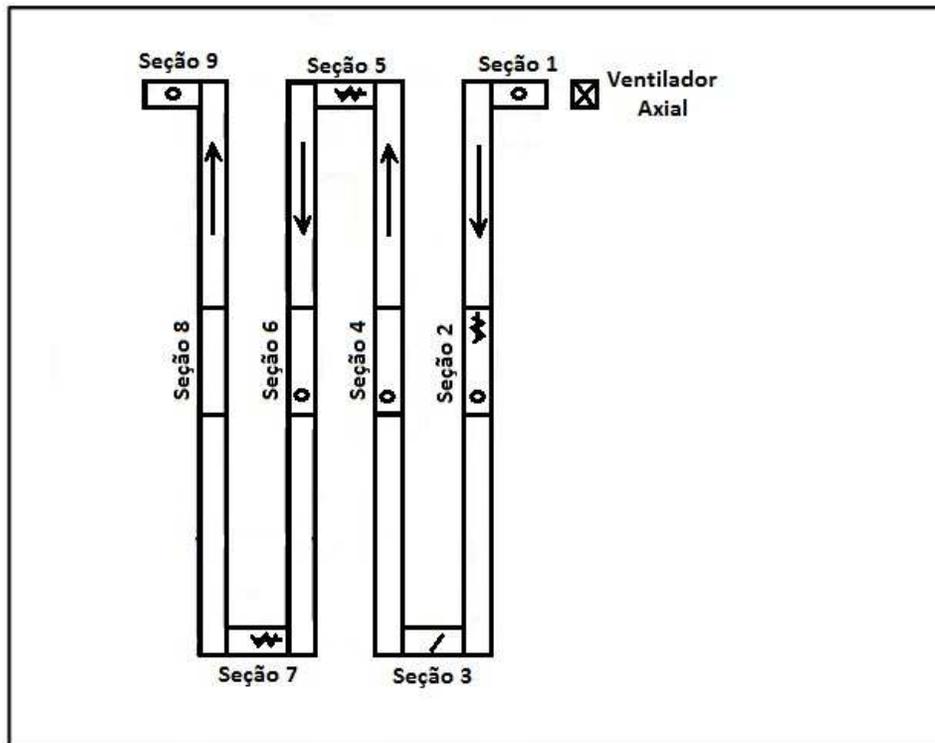


Figura 3.1: Seções da Planta.



Figura 3.2: Distribuição dos sensores e atuadores na planta.

Além dos componentes descritos acima, a planta possui, ao redor de cada resistência, refratários para evitar danos ao acrílico. Todo o acrílico está apoiado em uma base de madeira. A dinâmica do refratário e do acrílico não foram consideradas neste trabalho.

## 3.2 Acionamento

### 3.2.1 Alimentação

Foram utilizadas três resistências elétricas com potência nominal de  $1400\text{ W}$ , utilizadas em secadores de cabelo usualmente encontradas no mercado. Tais resistências, a princípio, operavam com tensão de trabalho de  $127\text{ V}$ . Ocorre que, para operar no sistema monofásico em sua potência máxima, a planta demandaria uma potência de  $4200\text{ W}$  e, conseqüentemente, uma corrente de aproximadamente  $33\text{ A}$ , demanda esta não disponível no atual laboratório onde a mesma está instalada. Portanto, a alimentação foi alterada para o sistema trifásico.

Os circuitos de acionamento, que antes utilizavam *triacs*, foram substituídos por relés de estado sólido, conforme ilustra a **Figura 3.3**. Esse relé de estado sólido suporta  $240\text{ V}$  e  $25\text{ A}$ , em corrente alternada, e é acionado por um sinal contínuo de  $5\text{ V}$ . Cada relé foi ligado em série a uma resistência, de forma a permitir a passagem de corrente somente quando acionado o mesmo, e essas três ligações (resistência + relé) foram ligadas em triângulo e cada vértice ligado a uma fase da alimentação. Desta forma, as resistências passaram a operar com uma tensão de trabalho de  $220\text{ V}$  e a planta, em sua potência máxima, demandaria aproximadamente  $13\text{ A}$  por fase, o que está disponível no laboratório ( $16\text{ A}$  por fase).

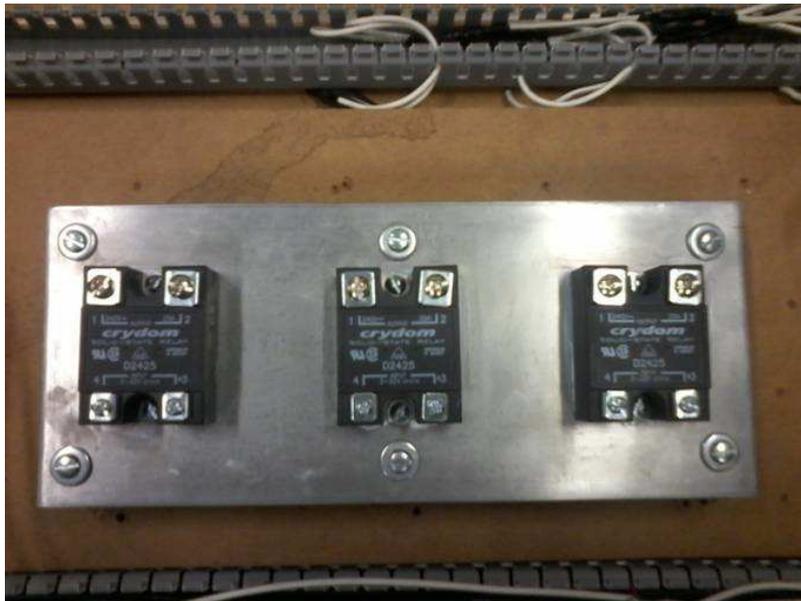


Figura 3.3: Relés de Estado Sólido.

Toda esta etapa foi realizada em apoio ao colega de curso Nelson de Figueiredo Barroso, em seu Trabalho de Conclusão de Curso intitulado *Instrumentação Virtual aplicada à*

*automação de um Sistema Térmico para levantamento de características e teste de Controladores Via Web.*

Alterado o sistema de alimentação da planta, tratou-se a ligação das resistências. A **Figura 3.4 a)** ilustra como a resistência utilizada neste trabalho é comumente encontrada no mercado, e as **Figuras 3.4 a) e b)** apresentam ligações em paralelo e em série, respectivamente. A ligação em paralelo proporcionaria uma potência máxima da ordem de 4 vezes a potência proporcionada pela ligação em série. Neste trabalho optou-se por utilizar a ligação em série, ilustrada pela **Figura 3.4 c)**, haja vista ser satisfatória a potência máxima fornecida, conforme explicado a seguir.

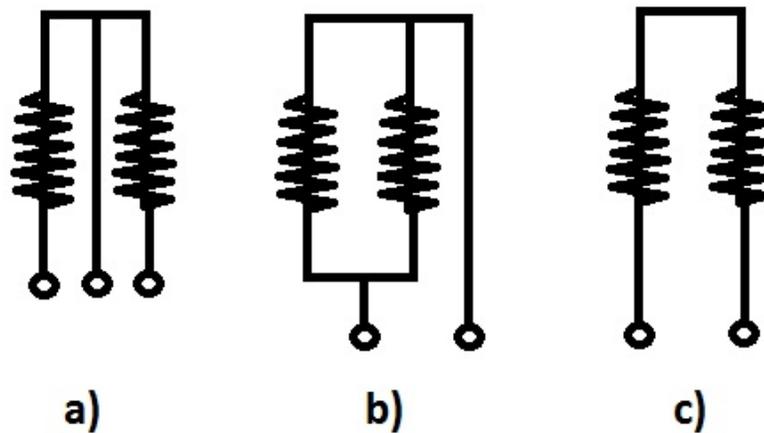


Figura 3.4: Diagrama Elétrico das Resistências: a) Sem Ligação; b) Ligação em Paralelo; c) Ligação em Série.

Com a finalidade de se obter a potência máxima fornecida por cada resistência com a configuração adotada, mediu-se a tensão e corrente em cada uma delas quando ligada a duas fases da rede. As medições obtidas e a potência máxima calculada são mostradas na **Tabela 3.1**

Tabela 3.1: Potência Máxima fornecida por cada Resistência

Resistência	Tensão ( $V_{rms}$ )	Corrente ( $I_{rms}$ )	Potência Máxima (W)
1	219	3,92	858,48
2	217	3,85	835,45
3	219	3,80	832,20

Para medir os valores de tensão e corrente apresentados na **Tabela 3.1**, foram utilizados, respectivamente, um Multímetro Digital marca *Meterman* modelo *34XR* e um Alicata Amperímetro marca *Minipa* modelo *ET-4091*, ambos calibrados e disponíveis no Laboratório de Sinais e Sistemas do CEFET-MG, *Campus* Divinópolis. A **Figura 3.5** ilustra os referidos instrumentos.



Figura 3.5: Multímetro Digital e Alicete Amperímetro utilizados na obtenção da Potência Máxima.

### 3.2.2 Controle por Ciclos

O acionamento dos relés é feito por controle de ciclos, ou seja, definida uma frequência, controla-se o número de semiciclos da senoide da rede que passam pela resistência no intervalo de tempo inverso à frequência escolhida. É importante que essa frequência seja menor do que a frequência da rede.

Um exemplo: Deseja-se acionar uma resistência com 50% de sua potência máxima.

Solução: Escolhendo uma frequência de  $10\text{Hz}$  teremos um período de  $0,1\text{s}$  para controlar o número de semiciclos que passam pela resistência. Portanto, basta acionar o relé durante metade desse período, ou seja, durante  $0,05\text{s}$ , e mantê-lo desligado durante o restante deste mesmo período. Supondo a frequência da rede igual a  $60\text{Hz}$ , podemos concluir que, com essa frequência de  $10\text{Hz}$ , teremos 6 ciclos, ou 12 semiciclos, para controlar em cada período. A **Figura 3.6** ilustra este exemplo.

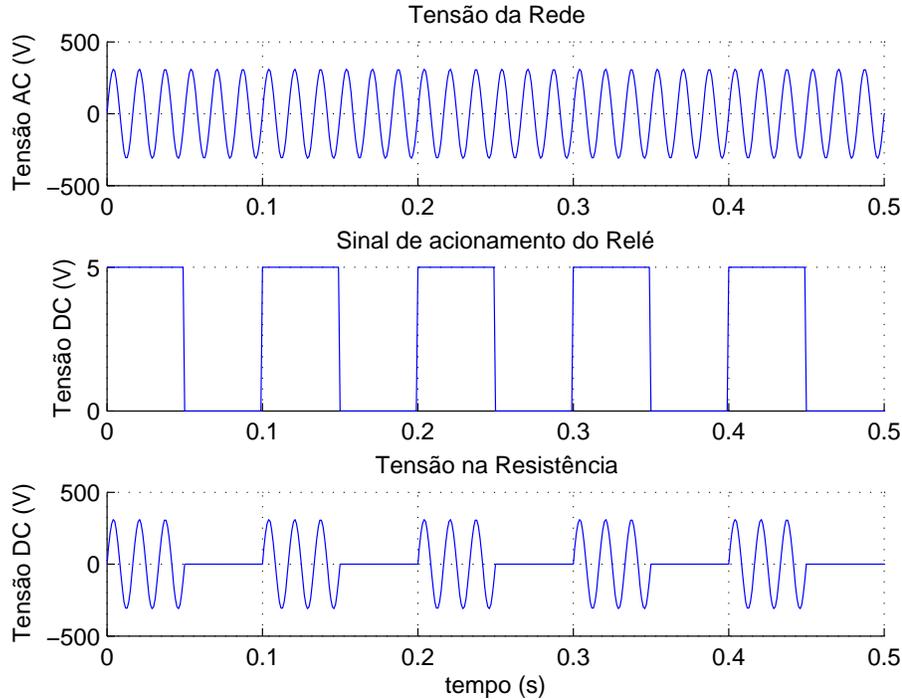


Figura 3.6: Sinal enviado ao relé - 50% da potencia máxima.

A escolha dessa frequência obedece uma relação de compromisso entre a precisão do acionamento e a percepção desse chaveamento pelos sensores. Uma frequência alta implica um período de controle baixo, o que resulta em um número reduzido de semiciclos a serem controlados. Em contrapartida, uma frequência baixa proporciona um período maior, o que significa que a resistência vai ficar mais tempo ligada e possivelmente fará com que esse chaveamento seja perceptível aos sensores.

Através de testes realizados, percebeu-se que uma frequência apropriada para esse controle seria de  $1\text{Hz}$ . Com uma simples divisão dessa frequência pelo dobro da frequência da rede (uma vez que o controle é feito por semiciclos, e não por ciclos), é possível constatar que a precisão do acionamento será aproximadamente  $0,8\%$ . Isso significa que para um sinal de, por exemplo,  $8,5\%$  da potência máxima, a resistência irá fornecer, na verdade,  $8,48\%$  ou  $8,56\%$  da potência máxima.

## 3.3 Instrumentação

### 3.3.1 Circuito Termopar

O circuito integrado utilizado para amplificar o sinal medido pelo cabo termopar foi o AD594AQ, o qual retorna uma tensão de  $10\text{mV}$  a cada  $1^\circ\text{C}$  de variação na temperatura. Uma descrição completa do circuito pode ser vista no Apêndice A.

Foram confeccionados 6 circuitos termopares, os quais estão ilustrados na **Figura 3.7**.



Figura 3.7: Circuitos Termopares

A princípio foi feita uma calibração estática desses circuitos a fim de se obter uma equação do tipo:

$$T(v_t) = av_t + b, \quad (3.1)$$

em que  $T(v_t)$  é a temperatura real  $v_t$  é a tensão retornada pelo circuito termopar.

Para tanto, os cabos termopares foram instalados no interior da seção 3 da planta, próximo à válvula de controle de fluxo, e a Resistência 1, localizada na seção 2, foi acionada para variar a temperatura. Foram utilizados um termômetro digital marca *Fluke*, modelo *54II*, já calibrado, e uma sonda da mesma marca, modelo *80PK-24*, própria para fluxo de ar, conforme ilustrado na **Figura 3.8**. Este instrumento de medição está disponível no Laboratório de Sinais e Sistemas do CEFET-MG, *Campus* Divinópolis. A ponta da sonda foi inserida no interior da seção 3, bem próximo à ponta dos cabos dos circuitos termopares, a fim de evitar temperaturas divergentes.



Figura 3.8: Termômetro Digital e sonda para fluxo de ar utilizados na calibração.

Visando obter o intervalo de tempo mínimo entre cada medição, deu-se um degrau de 40% da potência máxima na Resistência 1, sendo a resposta dos termopares mostrada na **Figura 3.9**. Dessa figura podemos constatar que a resposta dos termopares apresenta uma inclinação elevada por cerca de 60s após a aplicação do degrau. Fazer a calibração com os pontos nesta faixa poderia implicar erros de medição. Portanto, escolheu-se um intervalo de 120s entre cada medição. Ainda na **Figura 3.9**, podemos constatar que o termopar possui uma constante de tempo muito pequena em relação à da planta, o que indica ser desnecessária uma calibração dinâmica.

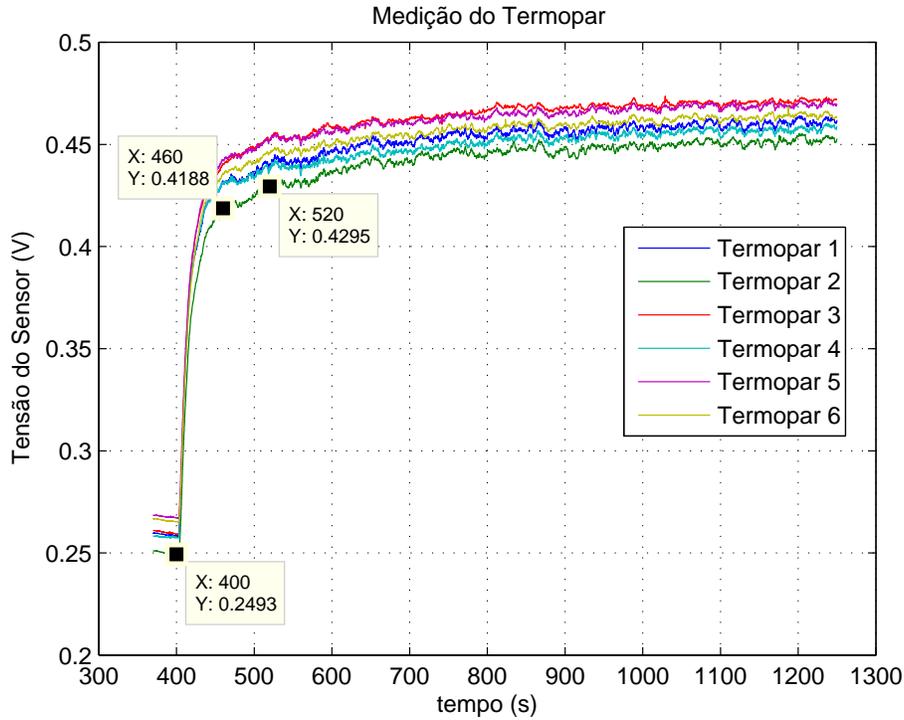


Figura 3.9: Resposta dos termopares a um degrau de 40% na Resistência 1

Definido o intervalo de 120s entre cada medição, foram coletadas 196 amostras, sendo variada a Resistência 1 de 0 a 100%. Foi utilizado um ajuste de curva por mínimos quadrados, através da função *polyfit* do software *MatLab*, para obter os coeficientes  $a$  e  $b$  da **Equação (2.1)**, os quais são apresentados na **Tabela 3.2**. Calculou-se também os parâmetros  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$ , os quais são utilizados para se obter os intervalos de confiança de 99,7%, ou seja, 99,7% dos ajustes feitos para as medições desses termopares estarão entre as retas  $T(v_t) = (a - 3\sigma_a)v_t + b - 3\sigma_b$  e  $T(v_t) = (a + 3\sigma_a)v_t + b + 3\sigma_b$ . Os parâmetros  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  também são apresentados na **Tabela 3.2** e foram calculados, conforme proposto em (Doebelin [1990]), através das equações:

$$\sigma_a^2 = \frac{N\sigma_T^2}{N \sum_{i=1}^N v_t^2 - (\sum_{i=1}^N v_t)^2} \quad (3.2)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\sigma_T^2 \sum_{i=1}^N v_t^2}{N \sum_{i=1}^N v_t^2 - (\sum_{i=1}^N v_t)^2} \quad (3.3)$$

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (av_t + b - T)^2 \quad (3.4)$$

Tabela 3.2: Calibração dos Termopares ( $T(v_t) = av_t + b$ )

Termopar	Coefficiente a	$\sigma_a$	Coefficiente b	$\sigma_b$
1	93,9109	0,1130	0,8182	0,0621
2	93,6383	0,1098	1,4822	0,0598
3	96,2809	0,1830	-0,0222	0,0997
4	94,8384	0,1311	-0,2075	0,0727
5	93,6271	0,1257	0,0263	0,0703
6	94,5403	0,1255	0,0668	0,0695

Os pontos coletados, as retas ajustadas e os intervalos de confiança obtidos para os circuitos termopares de 1 a 6 são apresentados nas **Figuras 3.10 a 3.15**, respectivamente.

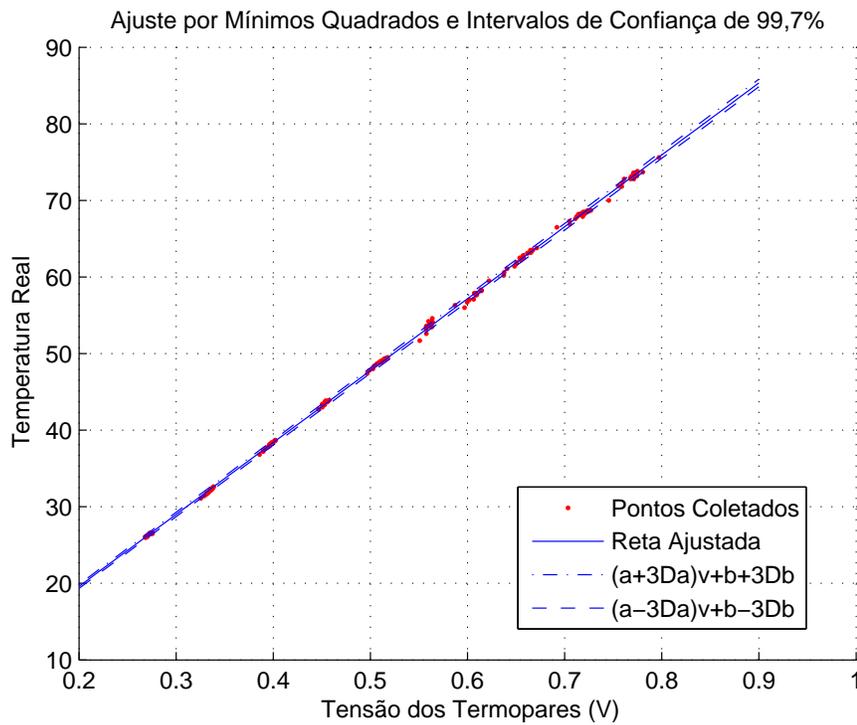


Figura 3.10: Calibração Estática do Termopar 1 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

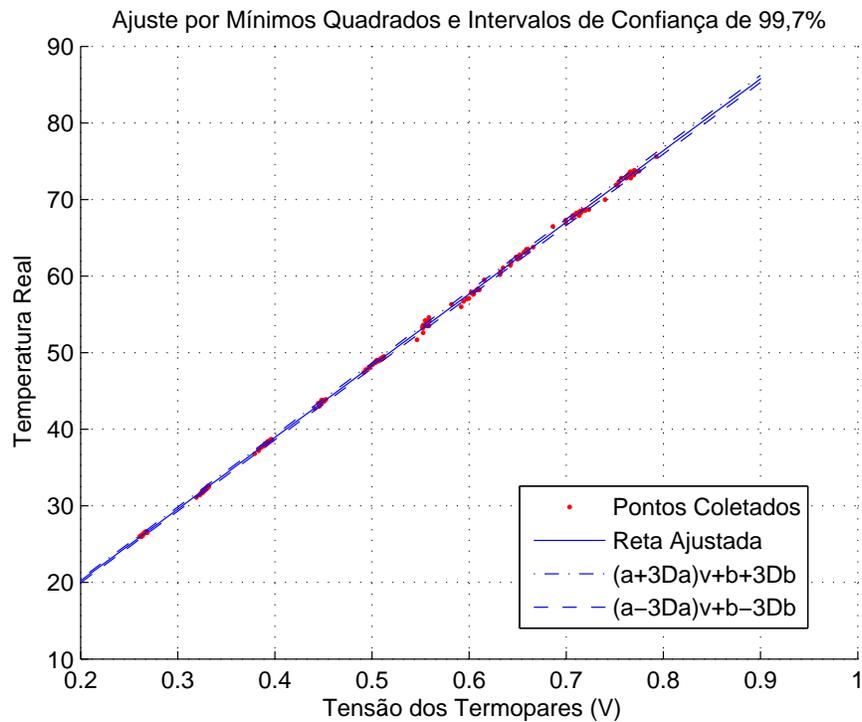


Figura 3.11: Calibração Estática do Termopar 2 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

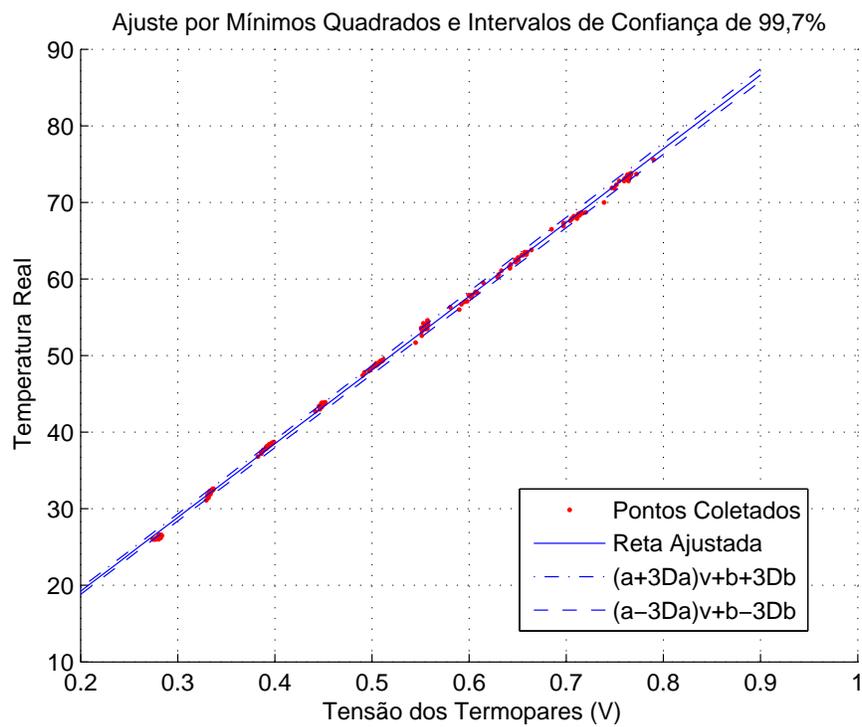


Figura 3.12: Calibração Estática do Termopar 3 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

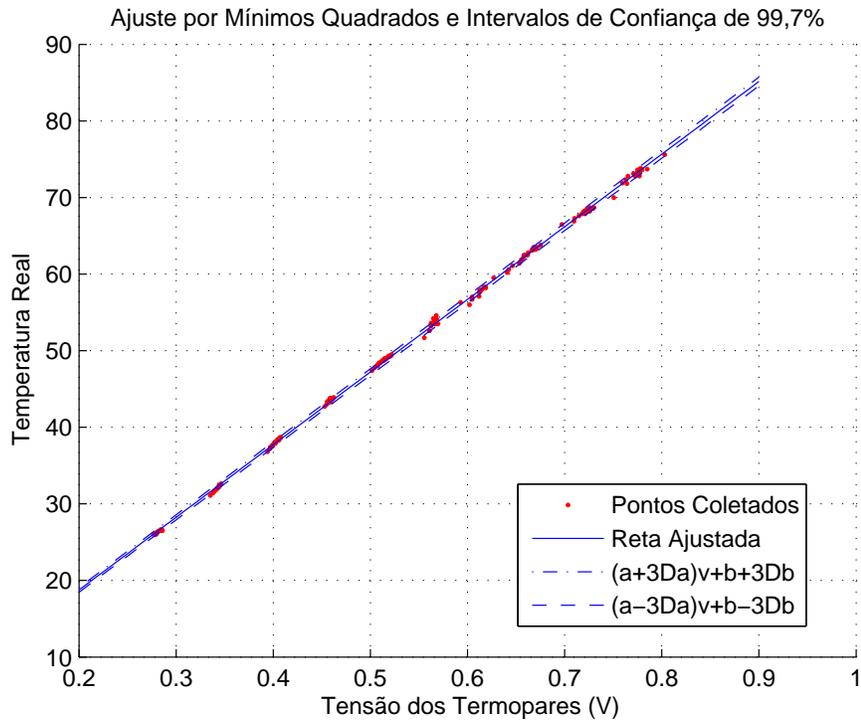


Figura 3.13: Calibração Estática do Termopar 4 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

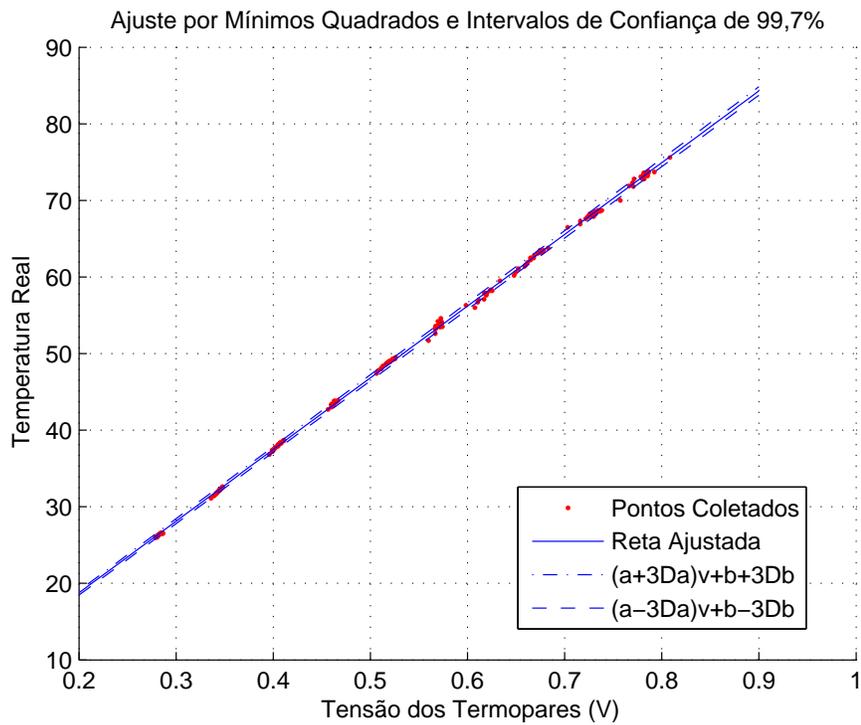


Figura 3.14: Calibração Estática do Termopar 5 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

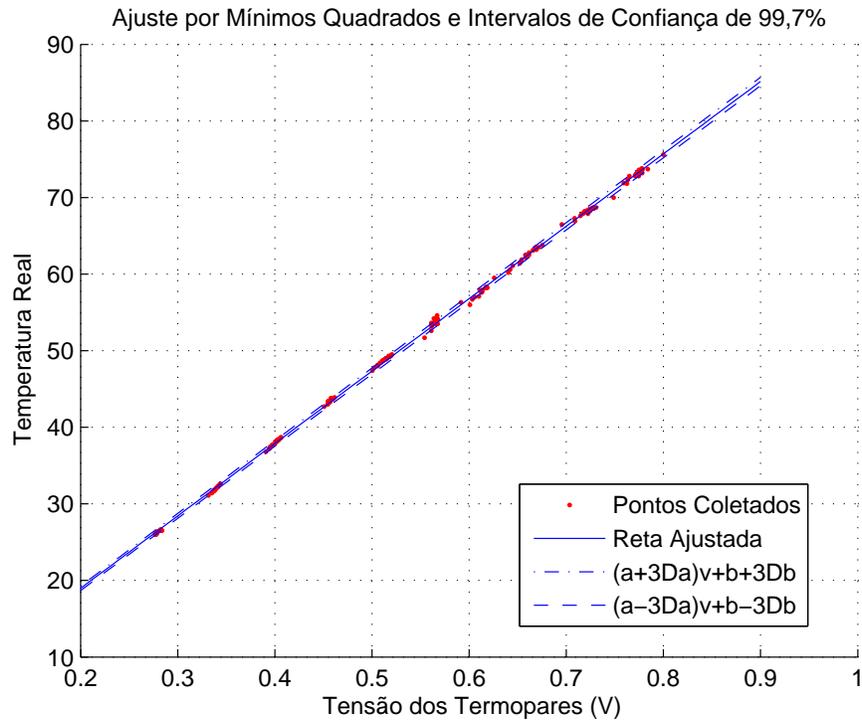


Figura 3.15: Calibração Estática do Termopar 6 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

Pode-se perceber das **Figuras 3.10 a 3.15** um acúmulo dos pontos coletados em certas regiões da curva. Isso deve ao fato do passo de cada degrau (0,5%) ser menor do que a precisão do acionamento (0,8%, conforme discutido anteriormente).

Calibrados os Circuitos Termopares, os mesmos foram fixados na planta conforme ilustra a **Figura 3.16**. O cabo termopar de cada circuito mede 63cm de comprimento, o que permite, com esta disposição, alcançar quase todos os pontos da planta.



Figura 3.16: Disposição dos Termopares na planta.

### 3.3.2 Sensores LM35

O projeto inicial da planta aqui trabalhada incluía 5 sensores LM35 inseridos no interior da planta e dispostos conforme ilustrado na **Figura 3.2**. (Simeão [2009]) apresenta uma calibração feita com 28 amostras. No presente trabalho foi feita uma nova calibração, com 201 amostras, afim de se equiparar a confiabilidade destes sensores com a dos termopares. Nesta calibração, foram utilizados os mesmos instrumentos apresentados na calibração dos termopares, conservando também o mesmo ponto de medição, o mesmo atuador e o mesmo intervalo de tempo (120s) entre cada amostra.

Entretanto, visando minimizar a concentração das amostras observada na calibração dos termopares, foi utilizada uma frequência de 0,625Hz para o controle de ciclos, o que implica uma precisão de 0,5% da potência máxima para o acionamento (na calibração dos termopares a precisão era de 0,8%). Além disso, foi utilizado um passo de 2% da potência máxima (na calibração dos termopares o passo utilizado foi de 0,5%). Dessa forma, temos que o passo utilizado é 4 vezes o valor da precisão do acionamento.

Os coeficientes  $a$  e  $b$  obtidos para cada sensor, bem como os respectivos parâmetros  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$ , são apresentados na **Tabela 3.3**

Tabela 3.3: Calibração dos Sensores LM35 ( $T(v_t) = av_t + b$ )

Sensor	Coefficiente a	$\sigma_a$	Coefficiente b	$\sigma_b$
1	99,355	0,1086	-0,4016	0,0526
2	101,0179	0,1438	-0,4121	0,0685
3	101,0749	0,0961	-0,3647	0,0457
4	97,1902	0,0972	0,4754	0,0473
5	100,5313	0,0944	-0,5503	0,0453

Os pontos coletados, as retas ajustadas e os intervalos de confiança obtidos para os Sensores LM35 de 1 a 5 são apresentados nas **Figuras 3.17 a 3.21**, respectivamente.

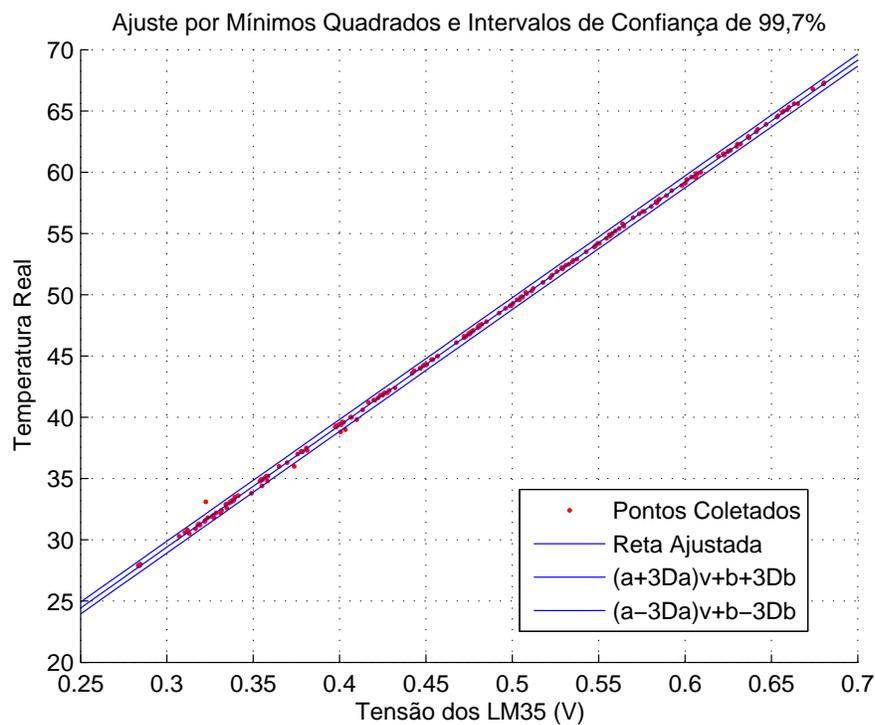


Figura 3.17: Calibração Estática do Sensor LM35 1 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

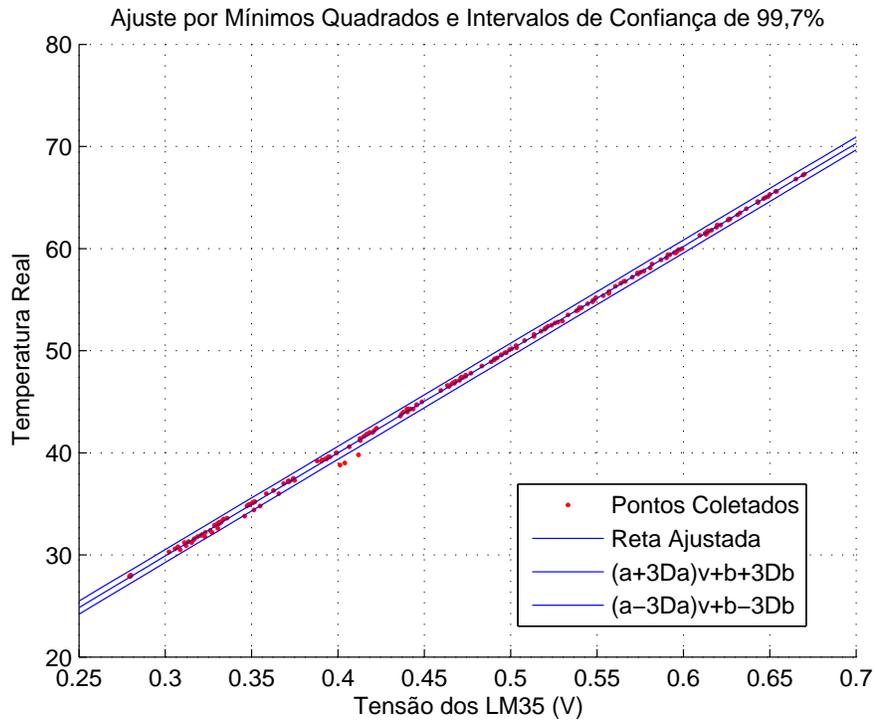


Figura 3.18: Calibração Estática do Sensor LM35 2 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

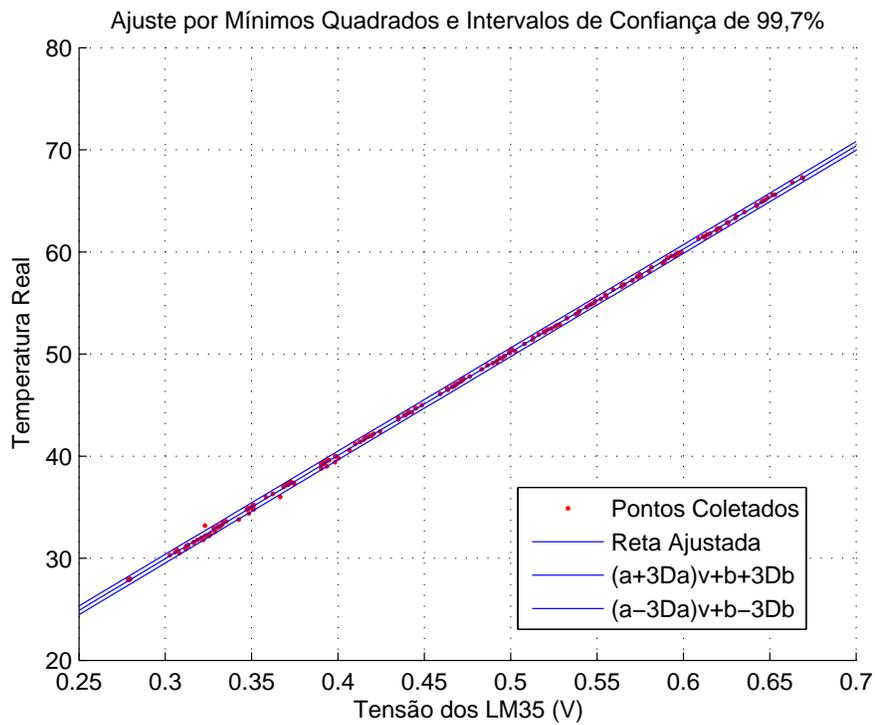


Figura 3.19: Calibração Estática do Sensor LM35 3 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

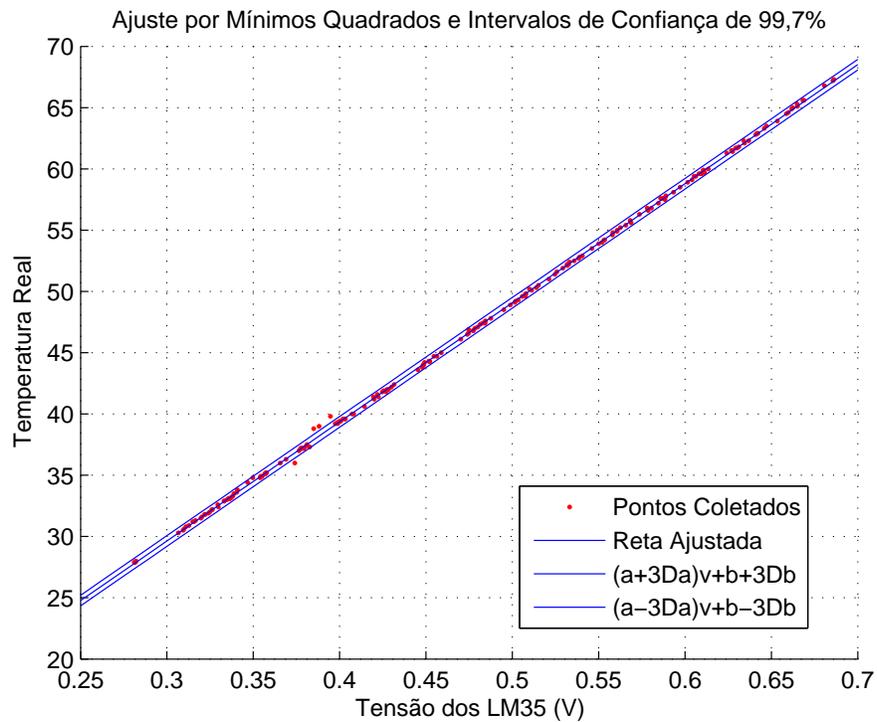


Figura 3.20: Calibração Estática do Sensor LM35 4 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

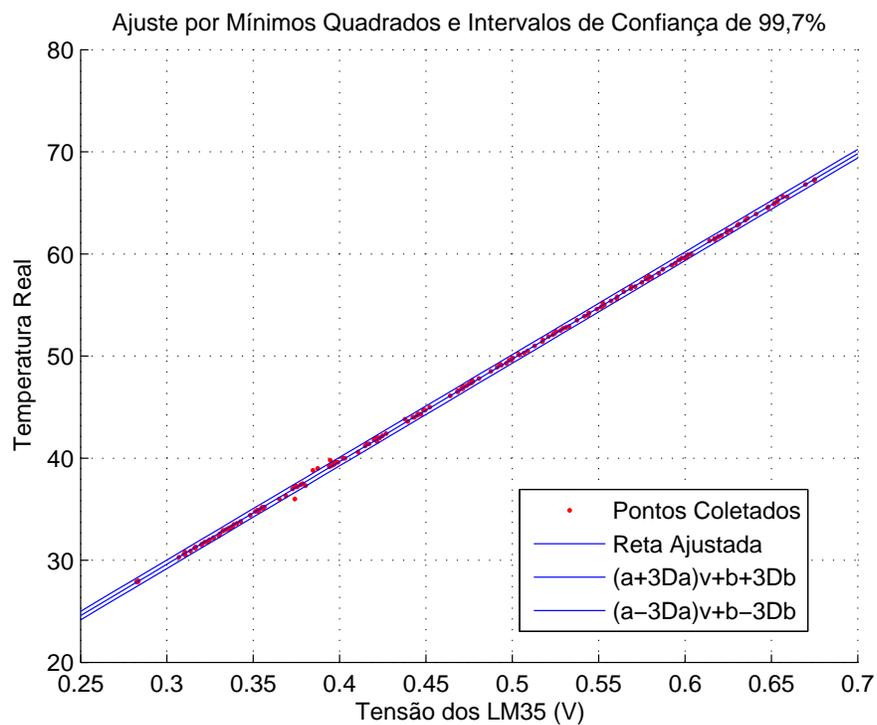


Figura 3.21: Calibração Estática do Sensor LM35 5 com as Curvas de Desvio e Dados de Calibração

Conforme já esperado, as amostras não mais aparecem agrupadas como ocorreu na calibração dos Termopares, reforçando assim, a hipótese de que tal agrupamento ocorre devido à utilização de um passo menor do que a precisão do acionamento. Foram utilizados filtros RC com constante de tempo de  $220ms$  ( $R=10K\Omega$  e  $C=22\mu F$ ) para leitura dos sinais dos sensores.

### 3.3.3 Medindo o Fluxo de ar

Para medir a velocidade do fluxo de ar foi utilizado um anemômetro digital marca MIT, já calibrado, conforme ilustrado na **Figura 3.22**.



Figura 3.22: Anemômetro digital utilizado para medir a velocidade do fluxo de ar.

Com a finalidade de obter uma medição mais precisa, foi utilizado um anteparo ao redor da hélice do anemômetro, garantindo que todo o fluxo passe pelo sensor. Dessa forma reduzimos a área útil da seção transversal do forno de  $81cm^2$  para  $23cm^2$ , sendo esta última a área total do sensor descontada a área de sua parte fixa. Nestas condições o anemômetro indicou uma velocidade de  $4m/s$ .

Como a velocidade do fluxo é inversamente proporcional à área da seção transversal, temos que a velocidade do fluxo de ar nas condições originais da planta é de  $1,14m/s$ .

### 3.4 Dimensões da planta

A **Figura 3.23** indica os pontos da planta onde foram instalados os sensores LM35, os termopares, as resistências e a válvula de controle de fluxo (*damper*).

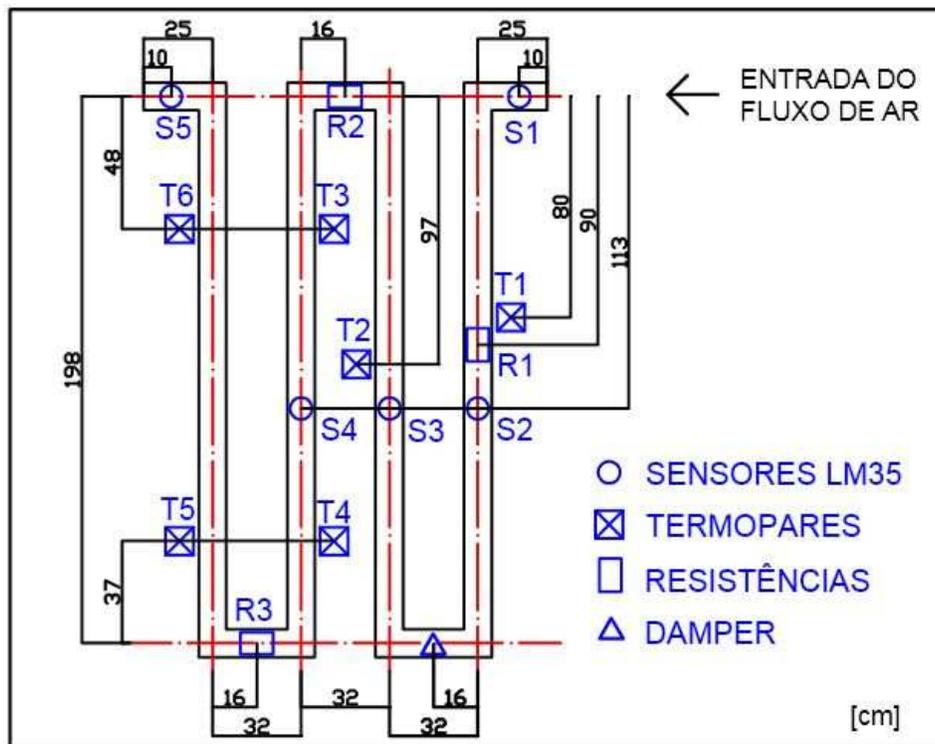


Figura 3.23: Dimensões reais da planta.

O cabo dos circuitos termopares possui 63cm de comprimento, ou seja, é possível medir a temperatura em qualquer ponto em um raio de 63cm de onde o mesmo encontra-se instalado.



## Ensaio Realizados no Sistema

### 4.1 Identificando o Comportamento da Planta

A fim de estimar a constante de tempo mais lenta da planta, foi realizado um teste com duração aproximada de 12 horas, iniciado às 21h 43min e finalizado às 09h 44min do dia subsequente. Neste teste, foram utilizados a Resistência 1, como atuador, os 5 sensores LM35, dispostos conforme ilustrado na **Figura 3.2**, e os 6 Termopares, dispostos conforme **Figura 3.16**. A disposição dos sensores e atuadores também podem ser vistas na **Figura 3.23**.

As pontas de medição dos Termopares 1, 2, 4 e 6 foram instaladas na superfície externa do acrílico ao lado dos Sensores LM35 2, 3, 4 e 5, respectivamente, de forma a obter a temperatura interna e externa da planta em uma mesma seção transversal. A ponta de medição do Termopar 3 foi instalada na superfície externa do acrílico, entre a Resistência 1 e o Sensor LM35 1, de forma a medir a temperatura externa do acrílico à temperatura ambiente. Já a ponta de medição do Termopar 5 foi instalada logo após a Resistência 3, a qual foi mantida desligada.

Como sinal de controle foram utilizados degraus de 10% da potência máxima, positivos e negativos, em intervalos de tempo de 7200s (2h 00min) entre cada degrau. A planta foi inicializada com 20% da potência máxima, e, após 7200s, aplicou-se os degraus de forma que a mesma operou com 30, 40, 30, 20 e 30% da potência máxima, respectivamente, respeitando o intervalo de tempo já determinado entre cada degrau.

As respostas dos Sensores LM35 à essa sequência de degraus são apresentadas na **Figura 4.1**. A resposta ao último degrau (30% da potência máxima) foi desconsiderada, haja vista a quantidade de ruído proveniente do acionamento de outros equipamentos no laboratório.

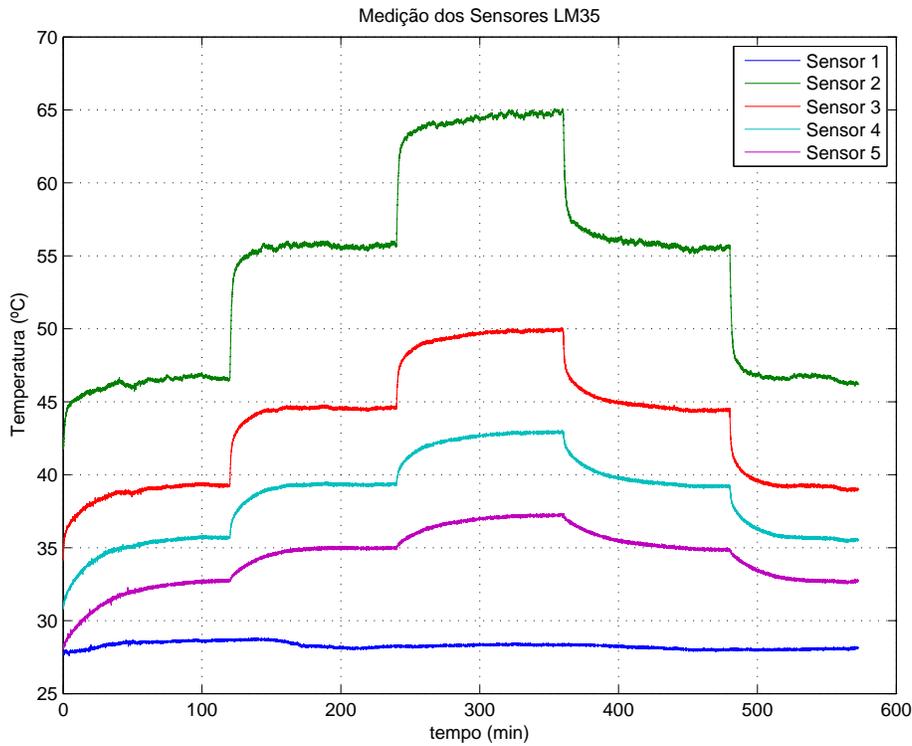


Figura 4.1: Resposta dos Sensores LM35 a uma sequência de degraus.

A **Figura 4.2** é um detalhe da **Figura 4.1** em que é dada atenção a um degrau específico. Nesse degrau é visível a *essência* de toda a modelagem da planta em questão, um detalhe sutil, mas essencial para o modelo. Percebe-se da **Figura 4.2** a existência de duas inclinações, uma mais acentuada no início e outra menor no final. Isso deve-se ao fato de que a dinâmica total da planta é uma somatória de duas dinâmicas distintas: o aquecimento do ar e o aquecimento do acrílico.

O aquecimento do ar, possuindo uma dinâmica mais rápida, contribui quase que tão somente com a primeira inclinação, estabilizando em aproximadamente 1560s (26min). A segunda inclinação, mais acentuada, deve-se ao aquecimento do acrílico, que possui uma dinâmica mais lenta, estabilizando em torno de 7020s (117min). Portanto, a dinâmica que prevalece no comportamento da planta é o aquecimento/resfriamento do acrílico. Vale ressaltar que o degrau ilustrado pela **Figura 4.2** foi obtido com a planta operando em 40% da potência máxima.

O ponto de operação escolhido para modelar a planta foi 30% da potência máxima. Aplicando o método da resposta complementar na saída medida pelo sensor LM35 5, em torno desse ponto de operação, obtivemos uma constante de tempo de

$$\tau = 1144s, \quad (4.1)$$

que é a constante de tempo mais lenta do sistema.

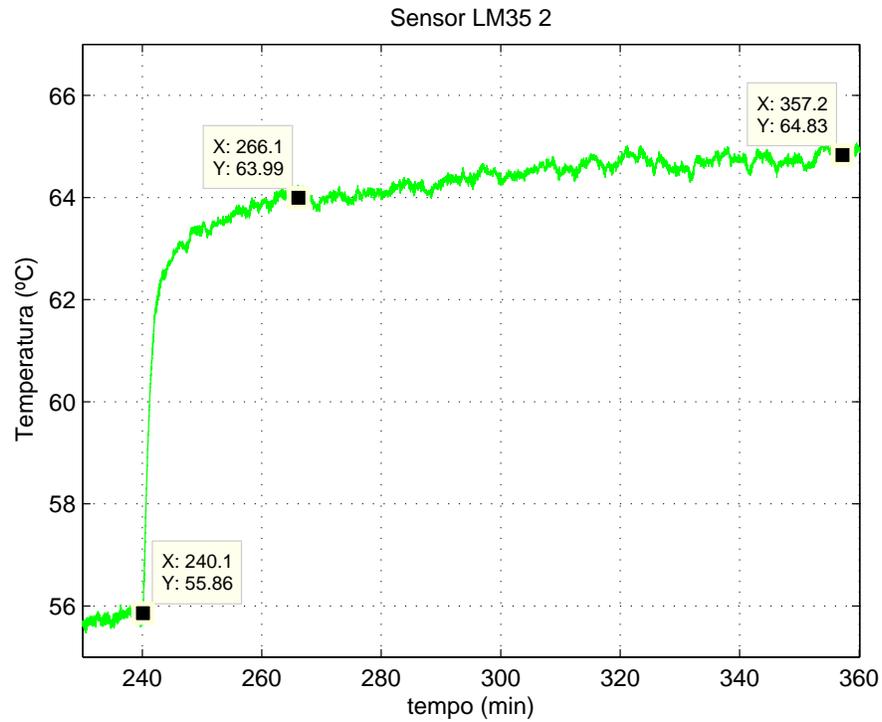


Figura 4.2: Detalhe do sinal do Sensor LM35 2.

A **Figura 4.3** apresenta a resposta dos Termopares à sequência de degraus utilizadas no teste, ou seja, a temperatura na superfície externa do acrílico.

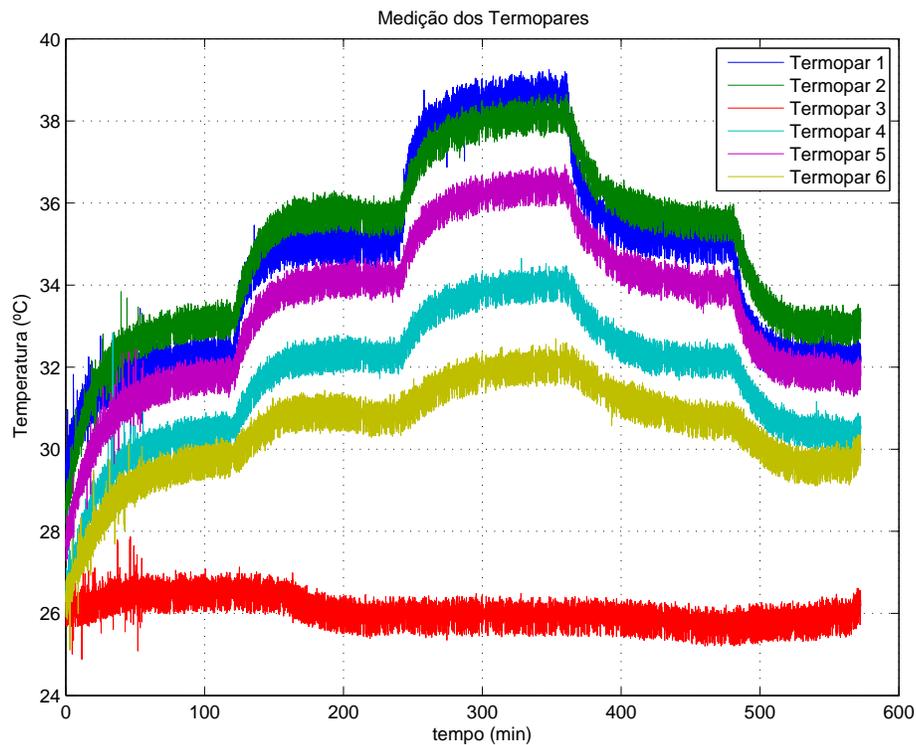


Figura 4.3: Resposta dos Termopares a uma sequência de degraus.

Como já mencionado no capítulo anterior, foram utilizados filtros RC para leitura dos Sensores LM35. Os circuitos termopares também possuem filtros RC, inclusive com mesma frequência de corte dos filtros utilizados nos Sensores LM35, mas estes são aplicados para filtrar os ruídos apenas no cabo termopar, ficando a transmissão do sinal do circuito até a placa de aquisição sujeita a ruídos. Isso pode ser verificado na **Figura 4.3**. Filtros RC, com mesma frequência de corte dos já utilizados, podem ser instalados entre a planta e a placa de aquisição de dados do computador para tratar esses ruídos. Entretanto, nesta etapa, foi utilizado um filtro digital para tratar o sinal dos termopares.

Para tratar o sinal dos termopares, foi utilizado um filtro digital passa baixas, de primeira ordem, da forma:

$$F(s) = \frac{p}{s + p}, \quad (4.2)$$

em que  $p$ , o pólo, é a frequência, em rad/s, em que se deseja filtrar o sinal. Para aplicar esse filtro foi utilizada a função *lsim*, do *MatLab*.

O tempo de amostragem utilizado neste teste foi de 0,1s, ou seja, uma frequência de 10Hz. Levando em consideração a super-amostragem do teste, escolheu-se, a princípio, uma frequência de corte de 0,5Hz (3,14rad/s). Constatou-se que o sinal foi filtrado, mas não satisfatoriamente. Sendo assim, a frequência de corte foi reduzida em uma década, passando a 0,05Hz (0,314rad/s), sendo obtido um resultado mais adequado. A **Figura 4.4** ilustra o sinal do Termopar 1 ruidoso e com os dois filtros projetados acima.

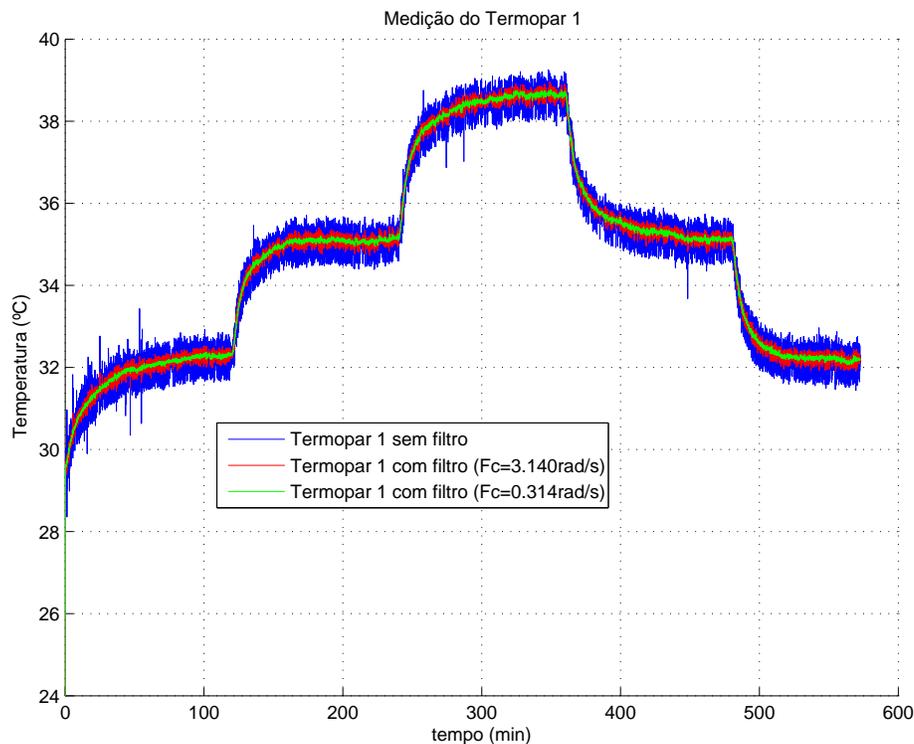


Figura 4.4: Filtros aplicados ao sinal do Termopar 1.

Da **Figura 4.4** podemos constatar que a filtragem do sinal não influencia na dinâ-

mica do mesmo. Sendo assim, foi utilizado o filtro digital passa baixas com frequência de corte de 0,314Hz, sendo os sinais filtrados dos Termopares apresentados na **Figura 4.5**.

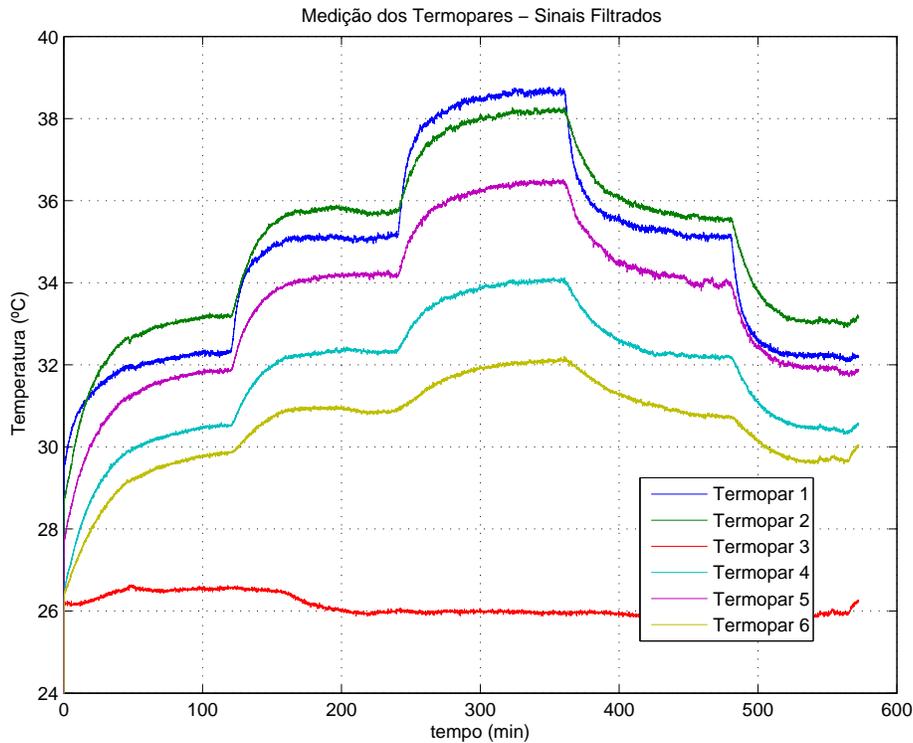


Figura 4.5: Resposta filtrada dos Termopares a uma sequência de degraus.

Outra observação importante que podemos fazer é a diferença entre as temperaturas medidas pelo Sensor LM35 1, ilustrado na **Figura 4.1**, e pelo Termopar 3, ilustrado pela **Figura 4.5**, que representa a diferença entre as superfícies interna e externa do acrílico sem a atuação das resistências. Tal diferença, sempre em torno de 1°C, pode ser atribuída à potência dissipada pelo ventilador axial na forma de calor.

## 4.2 Dinâmica do Acrílico

A fim de entender melhor a dinâmica de transferência de calor através do acrílico, foi feita a diferença de temperatura entre a superfície interna e externa do acrílico, com os dados obtidos no teste anterior. A **Figura 4.6** ilustra a diferença entre a temperatura medida pelo sensor LM35 e a temperatura medida pelo respectivo termopar localizado na superfície externa do acrílico, ao lado daquele sensor.

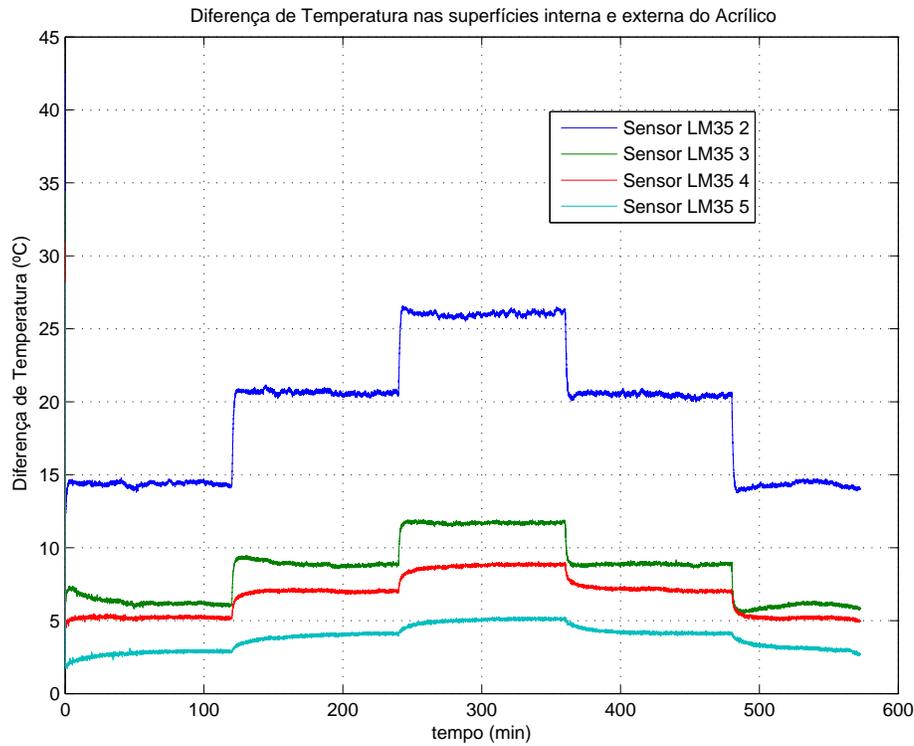


Figura 4.6: Diferença entre as temperaturas interna e externa do acrílico ao longo da planta.

Da **Figura 4.6** pode-se constatar que após algum tempo, a diferença de temperatura entre a superfície interna e externa do acrílico passa a ser constante, embora ambas continuem aumentando. Ou seja, a temperatura varia linearmente com a distância, conforme já mencionado no Capítulo 2 e explicado em (Incropera et al. [2013]).

Outra consideração que pode ser feita é que a dinâmica do acrílico se faz mais lenta à medida em que o ponto de medição se afasta do atuador. Isso é justificado pelo fato de ser esta a dinâmica total da planta (aquecimento/resfriamento do ar + aquecimento/resfriamento do acrílico), e não do acrílico isoladamente.

Foi realizado um teste com o intuito de analisar o comportamento do acrílico, no qual foi utilizada a tampa da Seção 3 (com a restrição de controle de fluxo). Neste teste foi utilizado o Termopar 4 acoplado na superfície externa da tampa da Seção 3, sendo que esta foi retirada da planta e colocada uma chapa de acrílico em seu lugar. Desta forma, com a tampa da Seção 3 apenas sob a influência da temperatura ambiente, deu-se um degrau de 30% da potência máxima na Resistência 1. Após 3600s (1h), a chapa de acrílico foi retirada e a tampa da Seção 3 foi colocada em sua posição original, incidindo sobre a mesma um degrau que perdurou por outros 3600s (1h). A característica relevante deste teste é que ele garante um degrau constante no acrílico. A **Figura 4.7** ilustra a resposta do acrílico a este teste.

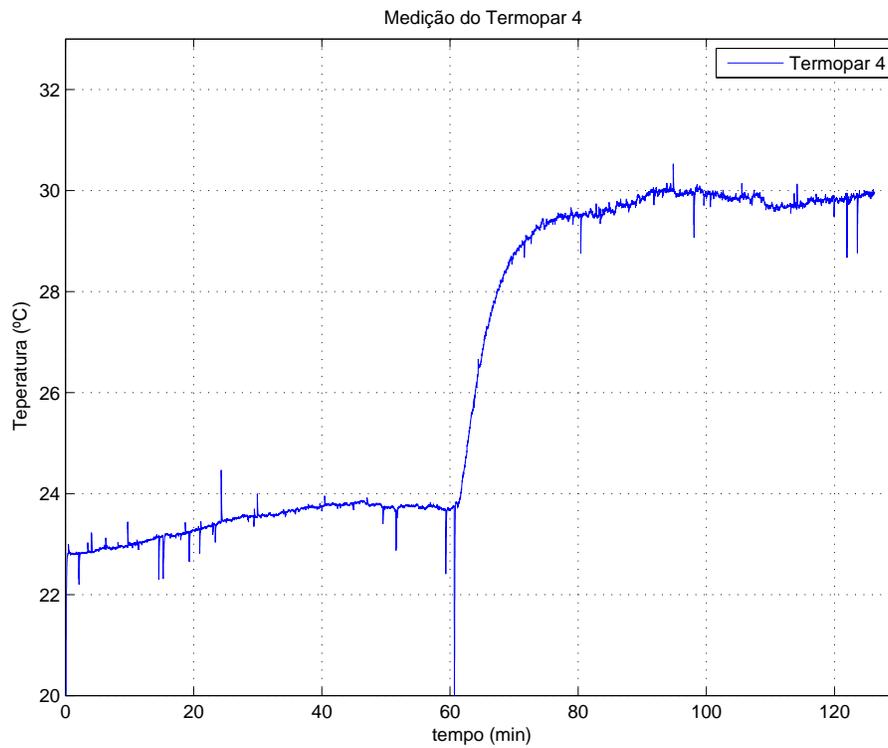


Figura 4.7: Degrau no acrílico localizado na Seção 3 da planta.

Aplicando novamente o Método da Resposta Complementar, obtemos o gráfico mostrado na **Figura 4.8**, juntamente com a reta ajustada.

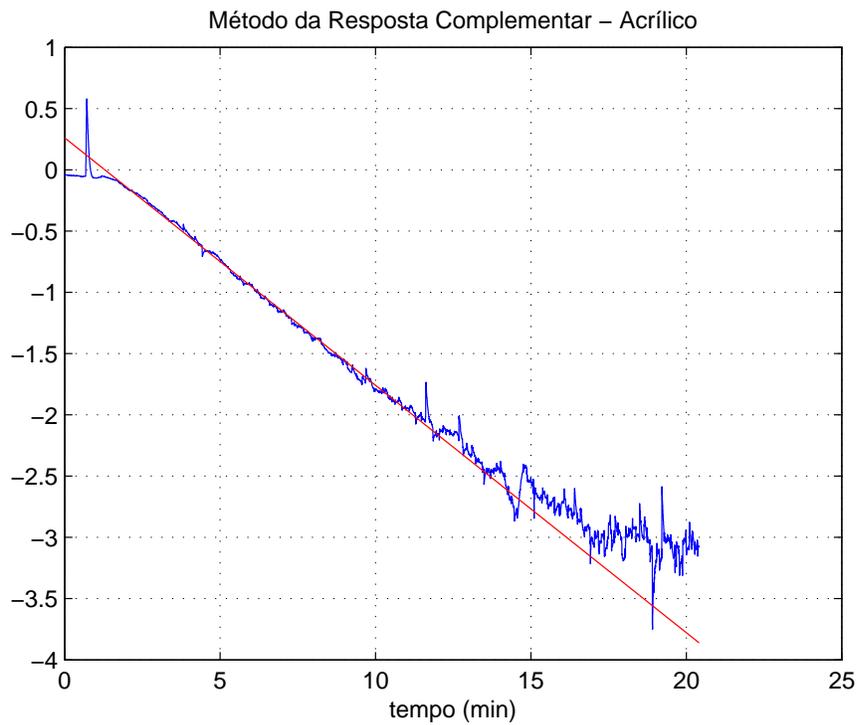


Figura 4.8: Método da Resposta Complementar - Acrílico.

Foram encontrados os valores de  $K = 0,6396$ ,  $\theta = 84,48s$  e  $\tau = 297,12s$ . Logo, o modelo de 1º Ordem obtido para o acrílico é dado pela **Equação 4.3**.

$$P_{acr}(s) = \frac{0,6396}{297,12s + 1} e^{-84,48s}. \quad (4.3)$$

A **Figura 4.9** ilustra uma comparação, normalizada, entre o modelo obtido e os dados reais.

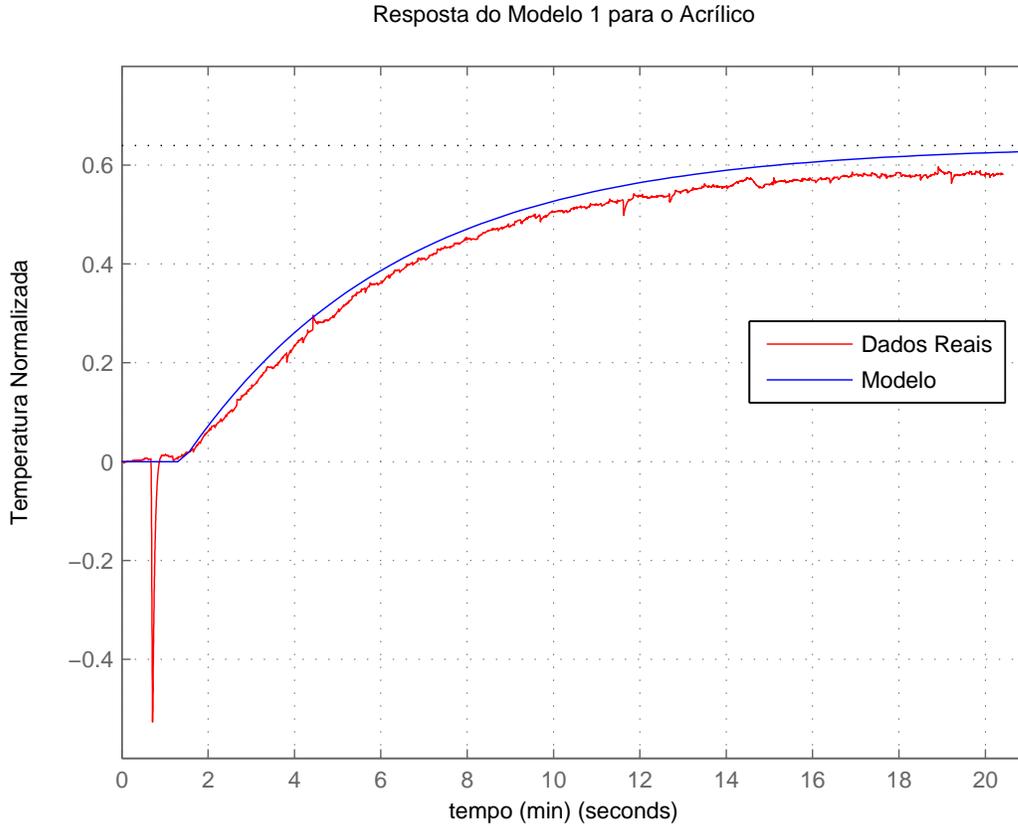


Figura 4.9: Modelo obtido e Dinâmica real do Acrílico.

Como podemos perceber, a dinâmica do acrílico isoladamente já se apresenta muito lenta ( $\tau_{acr} = 297,12s$ ). Logo, quando associada à dinâmica de aquecimento do ar, resulta em uma dinâmica bem mais lenta (como no caso mais lento  $\tau = 1144s$ ).

### 4.3 A Equação Tratada

A princípio, a equação a ser utilizada neste trabalho foi apresentada por (Leite et al.), qual seja:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\left(1 + \frac{R}{c_v}\right)v \frac{\partial T(x,T)}{\partial x} + \dot{q}_{mat} + \sum_{i=1,2,3} \dot{q}_{in} \delta_i(x) \quad (4.4)$$

Na **Equação 4.4**,  $T$  é a temperatura no interior de uma planta de aquecimento de ar, tipo forno em tubo, no instante de tempo  $t$  e na posição  $x$ .  $R$ ,  $c_v$  e  $v$  são, respectivamente, a constante universal dos gases, o calor específico do fluido e a velocidade do fluxo.  $\dot{q}_{mat}$  é a parcela correspondente à troca de calor através do material da parede do forno.  $\dot{q}_{in}$  é a potência inserida no sistema devido aos atuadores, e  $\delta_i(x)$  é uma função, dependente de  $x$ , que habilita  $\dot{q}_{in}$  apenas nas posições onde estão localizados os atuadores. (Leite et al.) já consideraram em seu trabalho uma planta com três atuadores. Assim,  $\dot{q}_{in}$  tem a forma

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = L_i, \\ 0, & \text{se } x \neq L_i, \end{cases} \quad (4.5)$$

em que  $L_i$  são as posições em estão localizados os atuadores.

(Leite et al.) ainda estima a variação de  $\dot{q}_{mat}$  como sendo

$$\frac{\partial \dot{q}_{mat}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \dot{q}_{mat} - \kappa(T - T_{out}), \quad (4.6)$$

em que  $\tau$  é a constante de tempo do material da parede para transferência de calor,  $\kappa$  é a condutividade térmica do material da parede, e  $T$  e  $T_{out}$  são, respectivamente, a temperatura no interior e no exterior da planta.

Devido a vários fatores, tais como a geometria da planta e sua não linearidade, a aplicação dessa equação não se mostrou satisfatória. Os ensaios apresentados a seguir demonstram essa conclusão.

## 4.4 Simulando a Equação

A princípio, foi feita uma discretização da **Equação 4.4**. Para discretizar a derivada parcial no tempo foi utilizado o Método das Diferenças Progressivas (*forward*), enquanto que para discretizar a derivada parcial no espaço foi utilizado o Método das Diferenças Regressivas (*backward*). Assim,

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{\Delta t}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{T(i, j) - T(i-1, j)}{\Delta x}. \quad (4.8)$$

Para discretizar a parcela referente à troca de calor através da parede do material, modelada pela **Equação 4.6**, também foi utilizado o Método das Diferenças Progressivas, ou seja,

$$\frac{\partial \dot{q}_{mat}(x, t)}{\partial t} = \frac{\dot{q}_{mat}(i, j+1) - \dot{q}_{mat}(i, j)}{\Delta t}. \quad (4.9)$$

Substituindo a **Equação 4.9** na **Equação 4.6**, obtém-se que

$$\dot{q}_{mat}(i, j+1) = \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau}\right) \dot{q}_{mat}(i, j) - \Delta t(T(i, j) - T(1, j)). \quad (4.10)$$

Por fim, substituindo as **Equações 4.7 e 4.8** na equação proposta por (Leite et al.) e atualizando  $\dot{q}_{mat}$  através da **Equação 4.10**, temos que o modelo discreto no tempo é dado por

$$T(i, j + 1) = \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x} + 1\right) T(i, j) - a \frac{\Delta t}{\Delta x} T(i, j - 1) + \Delta t \dot{q}_{mat}(i, j) + \Delta t \sum_{i=1,2,3} \dot{q}_{in} \delta_i(x), \quad (4.11)$$

em que

$$a = -\left(1 + \frac{R}{c_v}\right)v. \quad (4.12)$$

Foram utilizados os valores tabelados dos parâmetros  $R$  e  $c_v$ , quais foram  $287 \frac{J}{Kg^{\circ}C}$  e  $1004 \frac{J}{Kg^{\circ}C}$ , respectivamente. Já  $v$  foi mensurada anteriormente, sendo obtido o valor de  $1,14 m/s$ .

Simulando a **Equação 4.11** e fazendo alguns ajustes, considerando um sinal de controle semelhante ao aplicado na planta física, foi obtido a superfície ilustrada pela **Figura 4.10**.

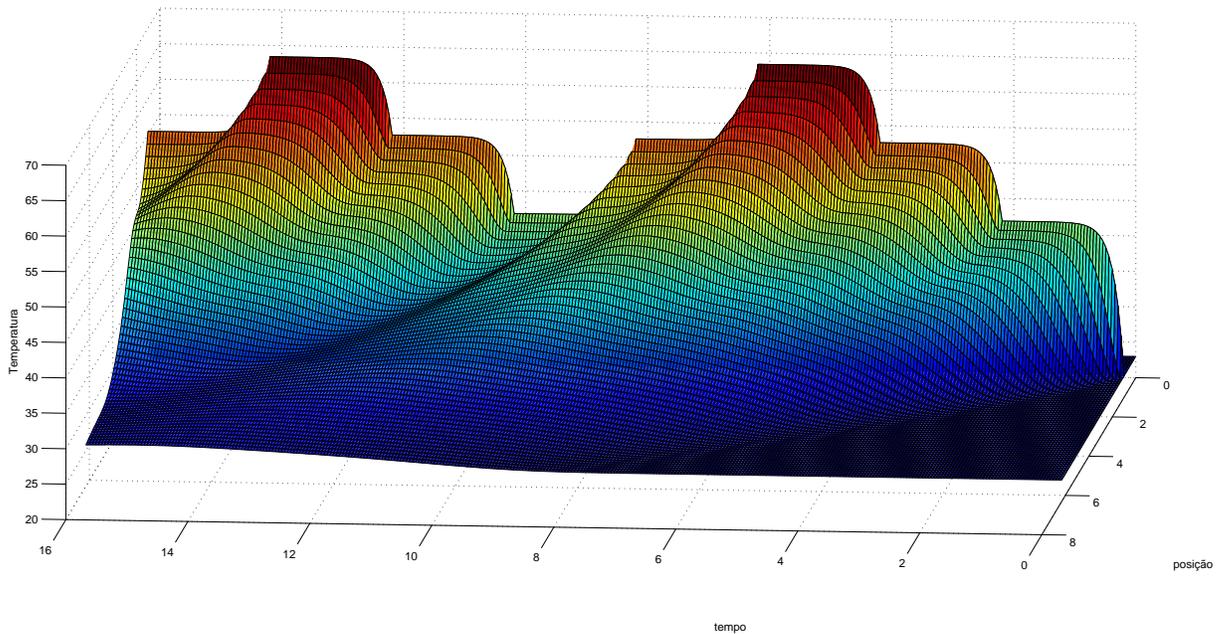


Figura 4.10: Simulação da Planta.

Embora o comportamento do modelo obtido se assemelhe à dinâmica real da planta, constatou-se uma certa dificuldade em relacionar seus parâmetros com os parâmetros reais. A **Figura 4.11** ilustra o comportamento da planta sujeita ao mesmo sinal de controle utilizado na simulação acima.

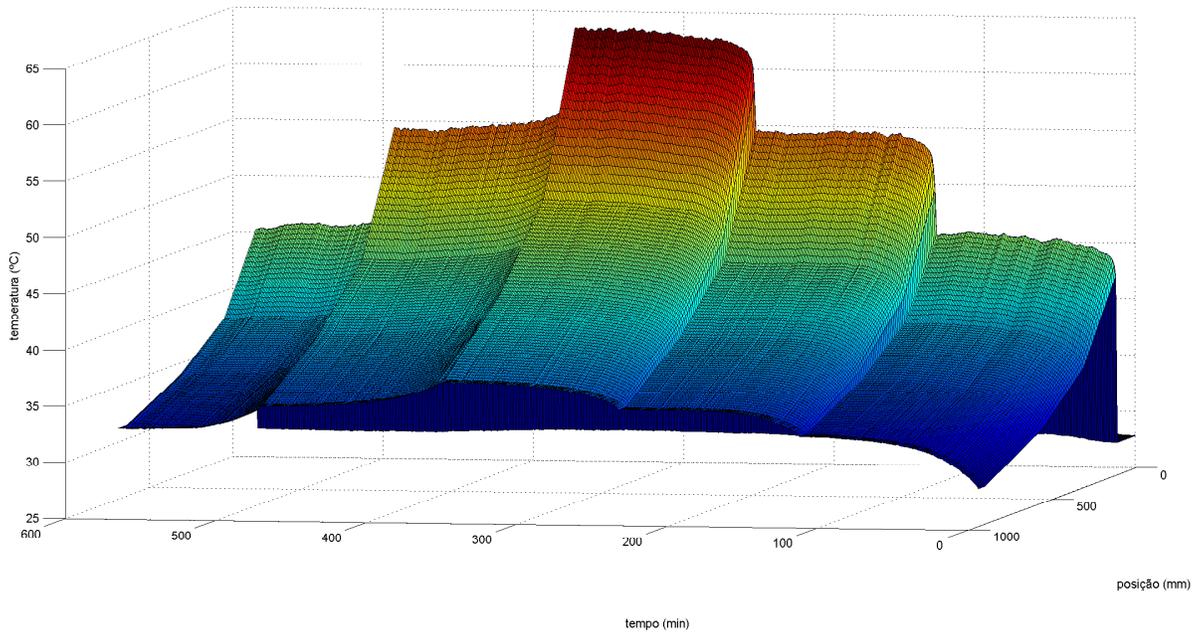


Figura 4.11: Resposta da Planta.

Como a temperatura foi mensurada em apenas 5 pontos da planta (Sensores LM35), foi feita uma interpolação linear para se obter a temperatura entre esses pontos.

Analisando as **Figuras 4.10 e 4.11** podemos notar uma discrepância tanto ao longo do tempo quanto ao longo do espaço. Ao longo do eixo do tempo podemos notar que a simulação possui uma unidade de medida, não necessariamente em metros, diferente dos dados reais. Nesse caso, talvez um simples ajuste da unidade resolveria o problema.

Entretanto, ao longo do eixo do espaço, o problema fica um pouco mais complexo. A dinâmica ao longo do espaço, de acordo com a simulação da equação proposta por (Leite et al.), apresenta um atraso que não foi constatado na resposta real da planta. Esse atraso supõe um provável erro em  $\dot{q}_{mat}$ , ou seja, na parcela que representa a troca de calor através do acrílico. A grosso modo, seria como se a planta não estivesse trocando tanto calor através do acrílico como pressupunha o modelo.

Desta forma, devido ao tempo escasso e a dificuldade de se ajustar o modelo obtido, foi adotada outra metodologia baseada na Modelagem a Parâmetros Concentrados, a qual é apresentada no capítulo seguinte.



## Modelagem a Parâmetros Concentrados

### 5.1 Justificativa

A modelagem a parâmetros distribuídos com utilização de EDPs, empregada até o momento neste trabalho, se mostrou complexa e apresentou resultados insatisfatórios. Várias razões podem ser atribuídas a esses resultados, dentre eles a geometria da planta, que, devido às várias "quinas", faz com que a transferência de calor se torne não uniforme ao longo do comprimento da planta, acarretando erro em  $\dot{q}_{mat}$ ;

Desta forma, adotou-se outra metodologia para modelagem da planta. Essa metodologia, baseada na modelagem a parâmetros concentrados, consiste em se obter 4 modelos de primeira ordem, um para cada sensor LM35 (exceto para o Sensor 1, que não sofre ação da Resistência 1), e fazer uma interpolação dos parâmetros desses modelos. Assim, a planta será descrita por um modelo de 1ª Ordem cujos parâmetros são funções da posição. Tal modelo terá a forma

$$G(s) = \frac{K(x)}{\tau(x)s + 1} e^{-\theta(x)s}. \quad (5.1)$$

### 5.2 Obtenção dos Modelos

Para obtenção dos modelos foi aplicado o Método da Resposta Complementar no segundo degrau ilustrado pela **Figura 4.1**. A **Figura 5.1** é uma ampliação da **Figura 4.1** em que é dada atenção ao degrau utilizado.

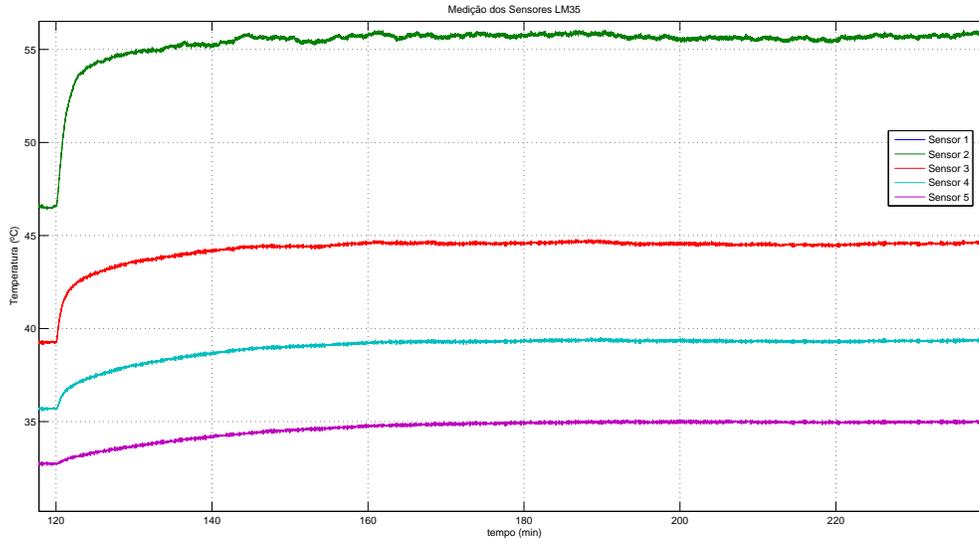


Figura 5.1: Resposta dos Sensores LM35 ao degraú.

O ganho  $K(x)$  é dado pela fórmula

$$K(x) = \frac{\Delta T(x, t)}{\Delta u}, \quad (5.2)$$

em que  $\Delta u$  é a variação da entrada, ou seja, 10 (em % da potência máxima). Analisando a **Figura 5.1** e aplicando a **Equação 5.2**, obtemos os ganhos ilustrados na **Tabela 5.1**.

Os atrasos, constatados visualmente, também através da **Figura 5.1**, são apresentados, em minutos, na **Tabela 5.1**.

Tabela 5.1: Ganhos e Atrasos concentrados.

Sensor	Posição (cm)	$K(x)$	$\theta(x)$
2	138	0,9159	0,0450
3	330	0,5354	0,0500
4	590	0,3669	0,1050
5	920	0,2231	0,1300

Para obter as constantes de tempo  $\tau$  dos modelos, foram plotadas as curvas ilustradas pelas **Figuras 5.2 a 5.5**, as quais são o resultado da aplicação do Método da Resposta Complementar nas respostas medidas pelos sensores LM35 2 a 5, respectivamente. As **Figuras 5.2 a 5.5** também ilustram os ajustes obtidos para os modelos (retas vermelhas) e os intervalos utilizados para aplicação do Método da Resposta Complementar (retas verdes).

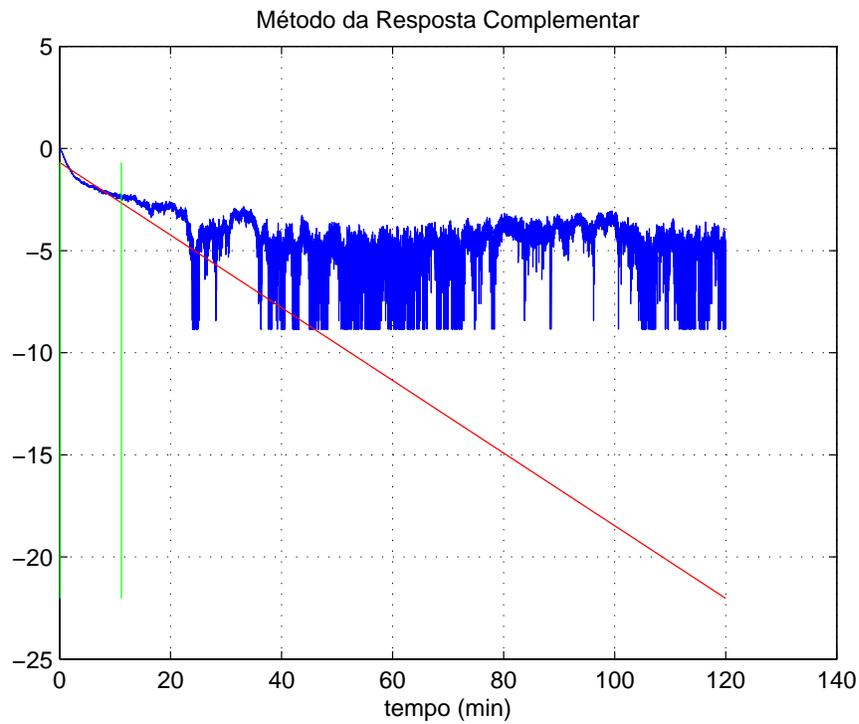


Figura 5.2: Reta ajustada para o Sensor LM35 2.

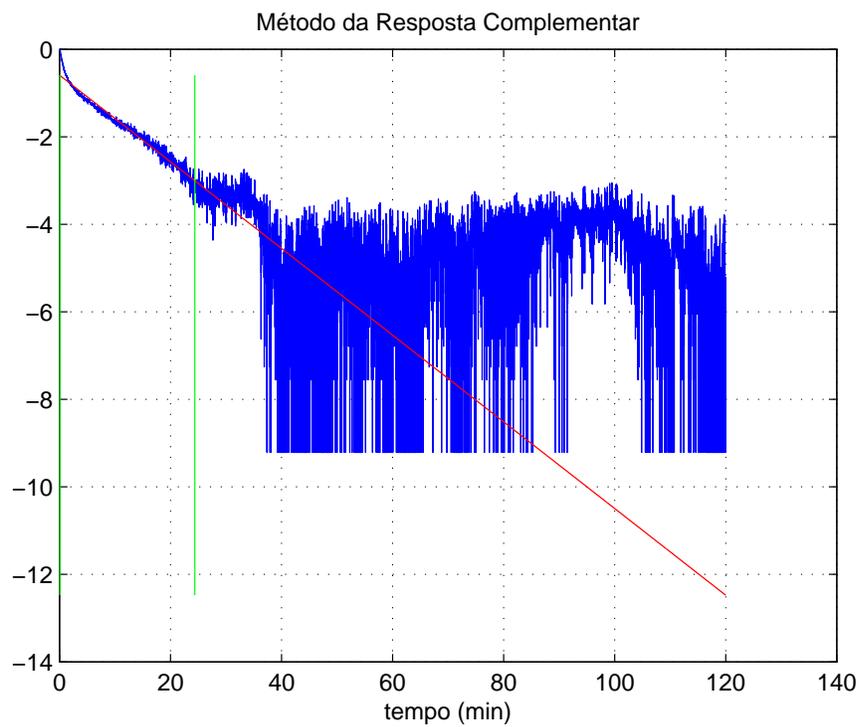


Figura 5.3: Reta ajustada para o Sensor LM35 3.

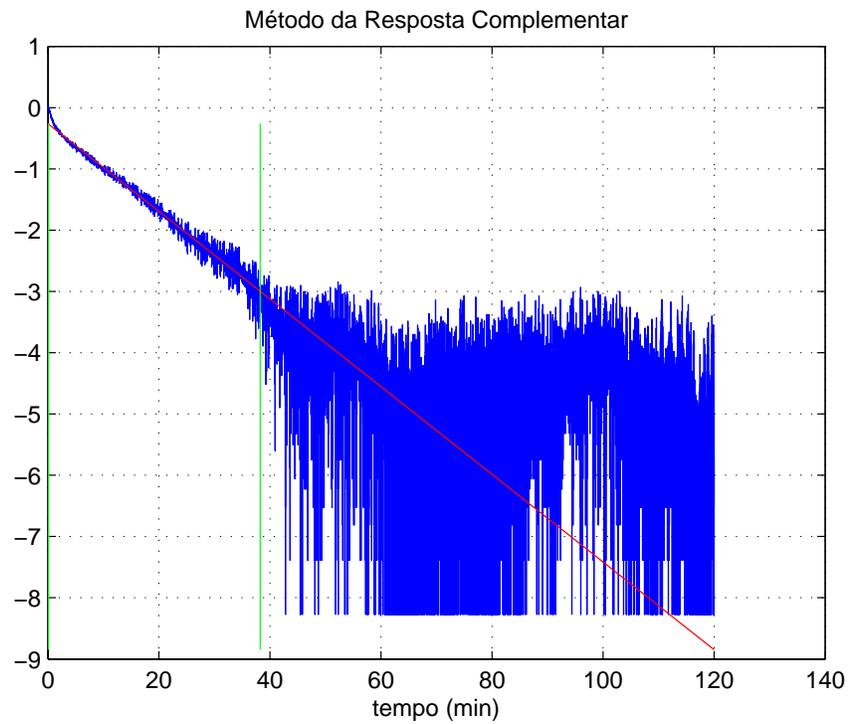


Figura 5.4: Reta ajustada para o Sensor LM35 4.

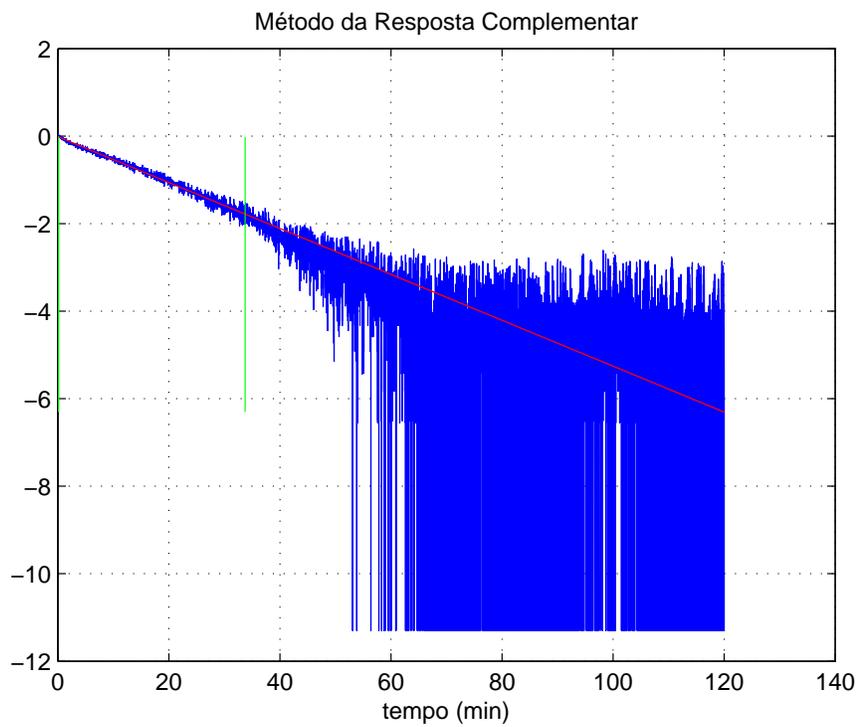


Figura 5.5: Reta ajustada para o Sensor LM35 5.

Na **Figura 5.2**, na qual aparece o resultado obtido pelo Sensor LM35 2, é possível

constatar duas seções retas no início da curva. Isso porque, naquele ponto, o modelo que descreve a planta é de 2ª Ordem. Essas duas seções retas tendem a ficar menos evidente à medida em que afastamos o sensor do atuador.

Já na **Figura 5.5**, a qual ilustra o resultado obtido pelo último sensor, o Sensor LM35 5, não é mais nítida as duas seções retas, mas apenas uma. Isso porque um modelo de 1ª Ordem descreve bem a planta naquele ponto.

Embora um modelo de 2ª Ordem descreva a planta de forma mais razoável nos pontos próximos ao atuador, nos limitamos a obter um modelo de 1ª Ordem. Nos pontos em que são nítidas as duas seções retas, fizemos um ajuste de forma a considerar a contribuição das duas constantes de tempo, ou seja, linearizando as duas seções retas.

As constantes de tempo  $\tau$  obtidas, em minutos, são apresentadas na **Tabela 5.2**.

Tabela 5.2: Constantes de tempo concentradas.

Sensor	Posição (cm)	$\tau(x)$
2	138	5,6211
3	330	10,0991
4	590	13,9791
5	920	19,0714

As **Figuras 5.6 a 5.9** ilustram as respostas reais e as do modelo descrito pela **Equação 5.1** quando substituídos os parâmetros  $K(x)$ ,  $\theta(x)$  e  $\tau(x)$ , apresentados nas **Tabelas 5.1 e 5.2**, dos sensores LM35 2 a 5, respectivamente.

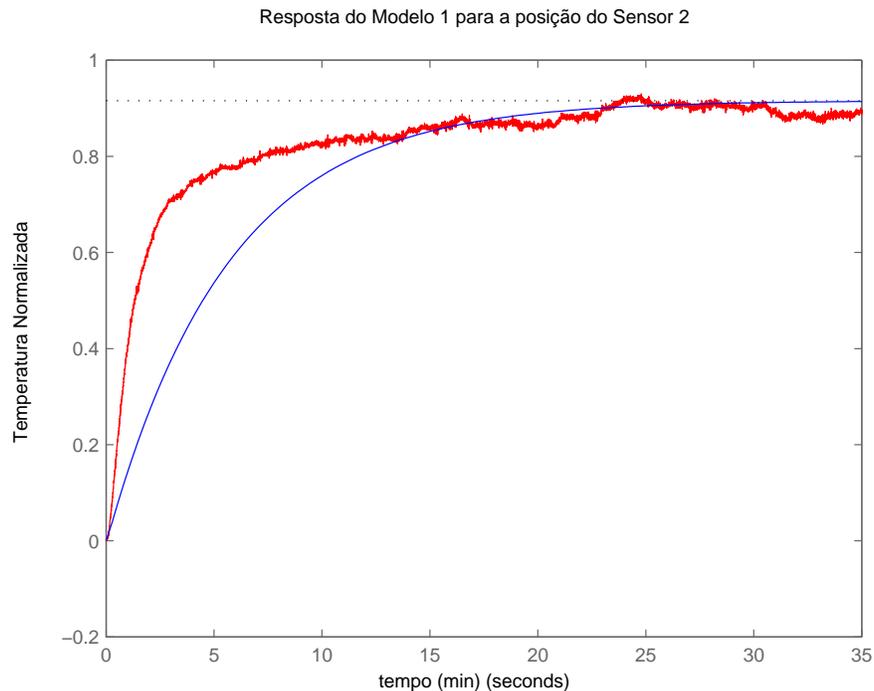


Figura 5.6: Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 2.

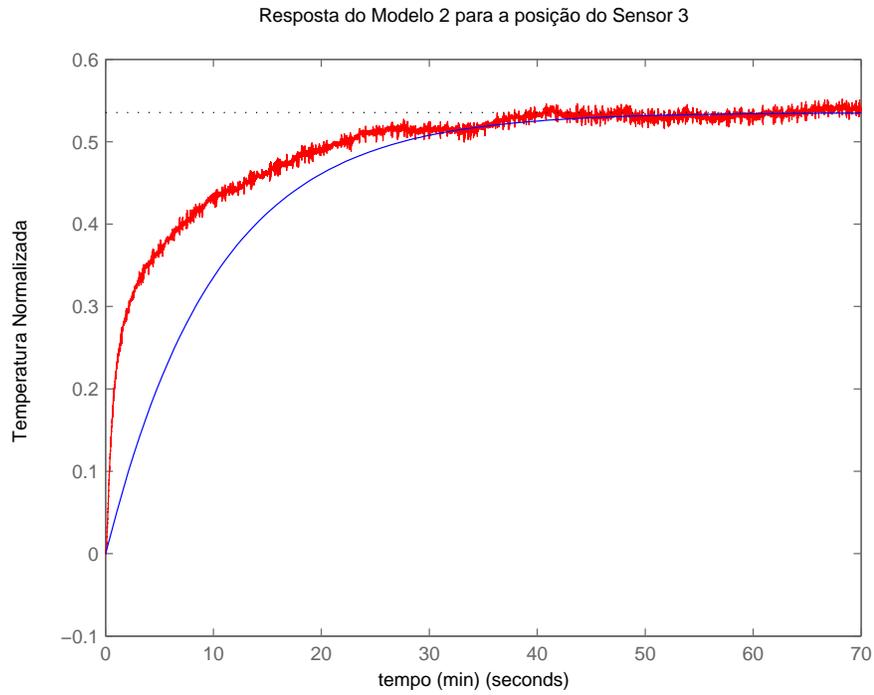


Figura 5.7: Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 3.

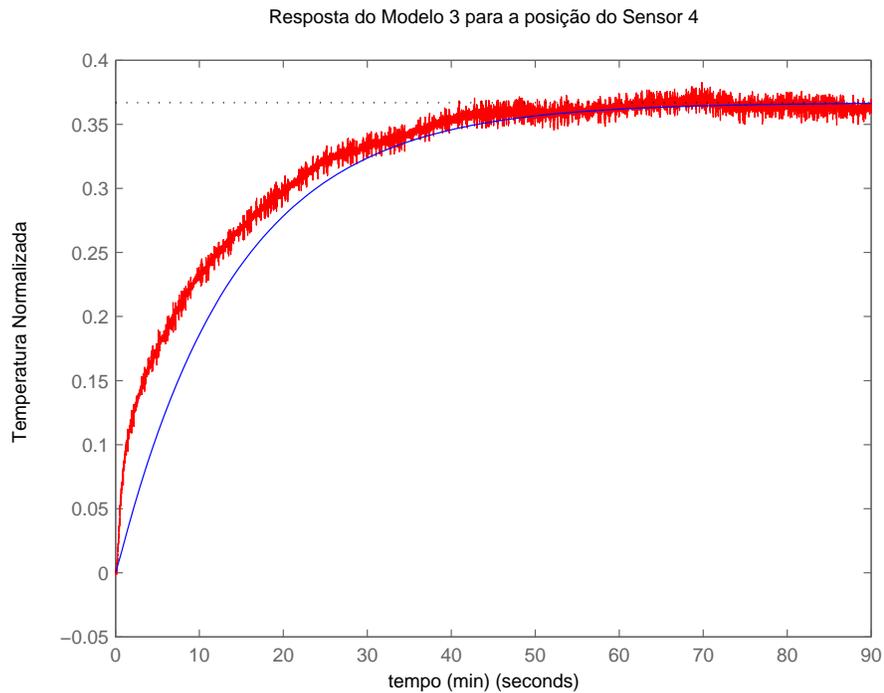


Figura 5.8: Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 4.

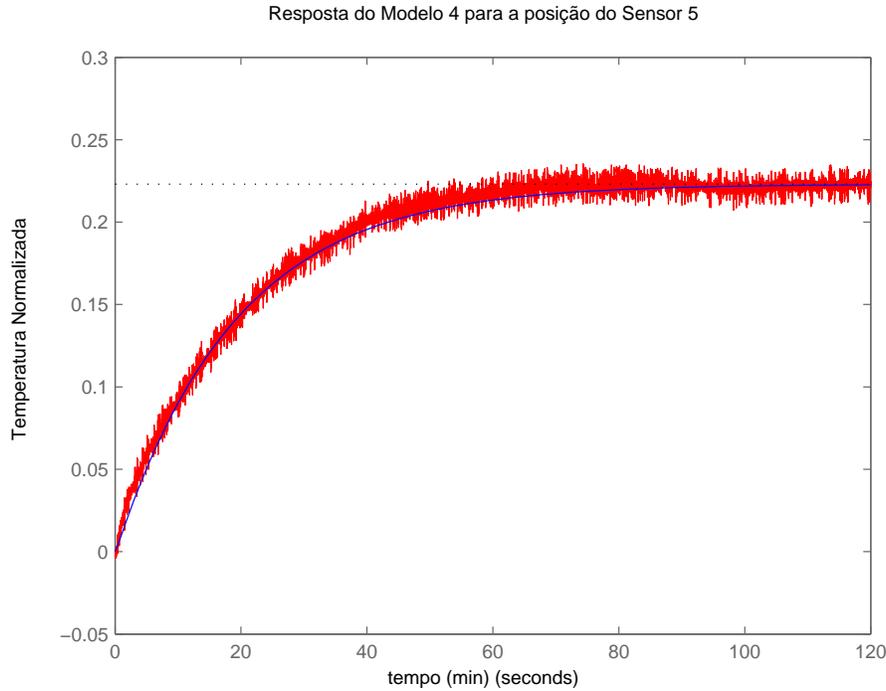


Figura 5.9: Resposta real e do modelo para o Sensor LM35 5.

Conforme esperado, o modelo de 1º Ordem descrito pela **Equação 5.1** descreve a planta de forma mais razoável à medida em que o sensor se afasta o atuador.

### 5.3 Interpolação dos Parâmetros

Para realizar o ajuste dos parâmetros foi utilizada uma interpolação de 2º grau, através da função *polyfit*, do software *MatLab*. O código completo do programa está disponível no Apêndice B. Nessa interpolação foram obtidos os três coeficientes (a, b e c) das funções  $K(x)$ ,  $\theta(x)$  e  $\tau(x)$ , todas de 2º grau, em função da posição. As equações para as funções  $K(x)$ ,  $\theta(x)$  e  $\tau(x)$  são apresentadas nas **Equações 5.3 a 5.5**, respectivamente.

$$K(x) = (0,0120x^2 - 21x + 11467)10^{-4}, \quad (5.3)$$

$$\theta(x) = (-0,0521x^2 + 1237,3x + 232850)10^{-7}, \quad (5.4)$$

$$\tau(x) = (-0,0518x^2 + 222x + 29784)10^{-4}. \quad (5.5)$$

As **Figuras 5.10 a 5.12** ilustram os parâmetros  $K$ ,  $\theta$  e  $\tau$  obtidos em cada modelo e as respectivas curvas ajustadas.

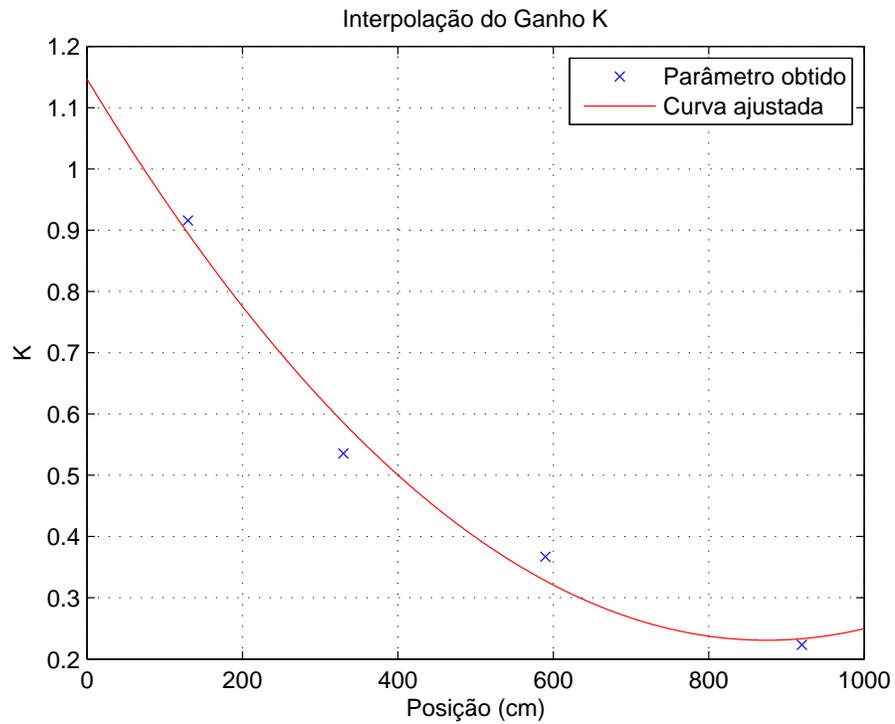
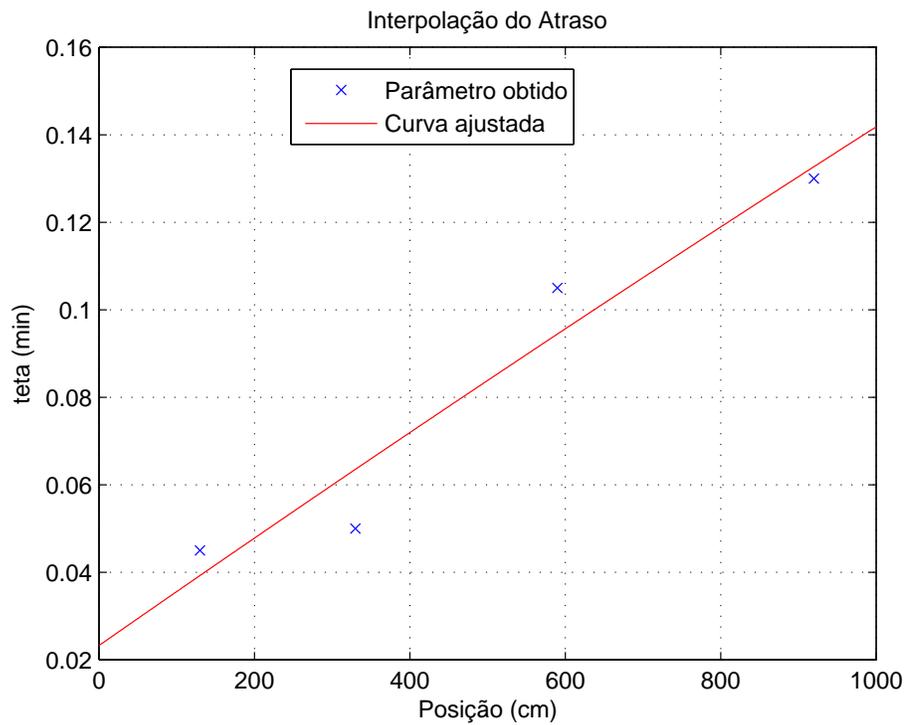


Figura 5.10: Curva ajustada para o parâmetro K.

Figura 5.11: Curva ajustada para o parâmetro  $\theta$ .

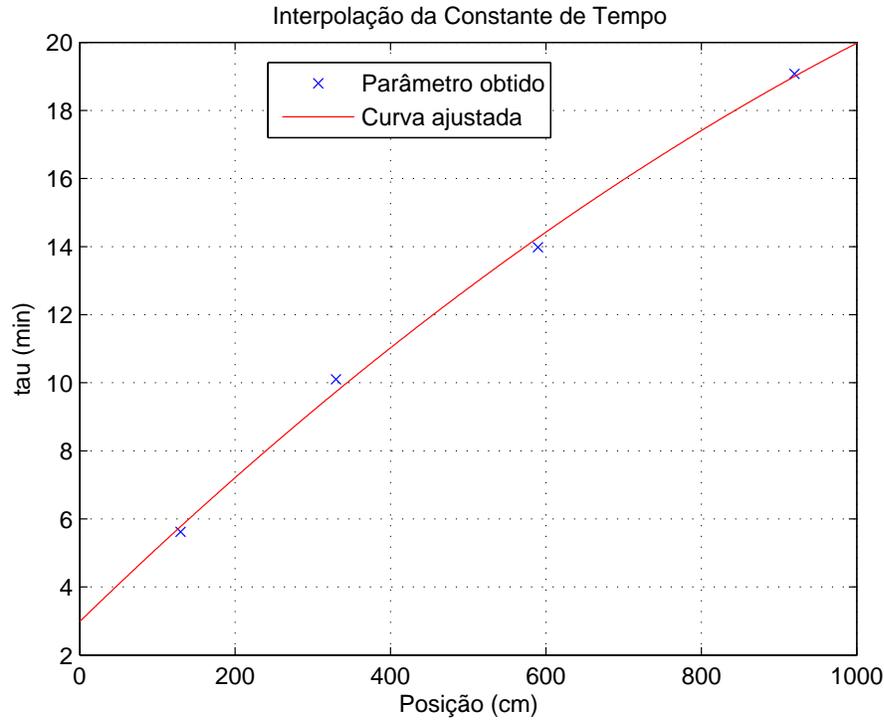


Figura 5.12: Curva ajustada para o parâmetro  $\tau$ .

Considerando o baixo valor do coeficiente a da **Equações 5.4**, temos que o atraso  $\theta$  pode ser considerado como uma função de 1º grau do espaço. Assim, no intuito de simplificar o modelo, a **Equações 5.4** pode ser substituída por

$$\theta(x) = (1,2373x + 232,85)10^{-4}. \quad (5.6)$$

Essa simplificação é ainda mais bem vista se considerada a semelhança da figura **Figura 5.11** a uma reta.

Portanto, temos que o modelo de 1ª Ordem a parâmetros distribuídos da planta, no domínio da frequência e no domínio do tempo são, respectivamente

$$T(x, s) = \frac{0,0120x^2 - 21x + 11467}{(-0,0518x^2 + 222x + 29784)10^{-4}s + 1} 10^{-4} e^{-(1,2373x + 232,85)10^{-4}s} \quad (5.7)$$

e

$$T(x, t) = (0,0120x^2 - 21x + 11467)10^{-4} (1 - e^{-(10^4 t - (1,2373x + 232,85))/(-0,0518x^2 + 222x + 29784)}) u(t). \quad (5.8)$$

## 5.4 Simulação e Comparação do Modelo

Durante as simulações foi constatada a necessidade de se incluir na **Equação 5.8** um termo responsável por representar a distribuição da temperatura inicial ao longo da planta.

Dos estudos feitos até agora, percebeu-se uma distribuição exponencial da temperatura ao longo de  $x$ . Após um ajuste por mínimos quadrados com os dados reais, observou-se que o melhor termo a ser acrescido à **Equação 5.8**, para compensar a distribuição da temperatura inicial em regime permanente, é dado pela **Equação 5.9**.

$$T_0(x) = 44,8055e^{-x/0,003}. \quad (5.9)$$

A **Figura 5.13** ilustra os pontos utilizados e a curva ajustada para  $T_0(x)$ .

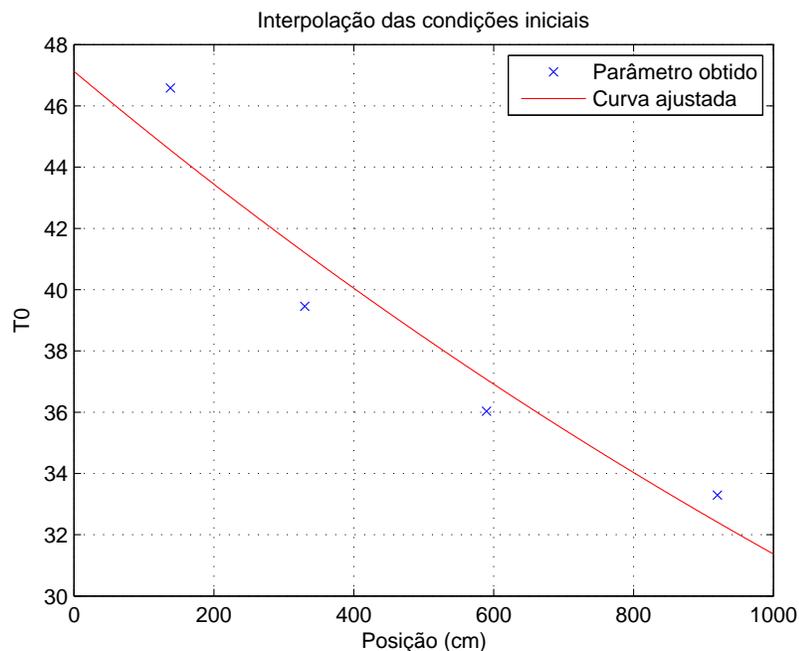


Figura 5.13: Interpolação das Condições Iniciais.

A **Figura 5.14** ilustra a simulação do modelo descrito pela **Equação 5.8**, somada ao termo da **Equação 5.9**, quando aplicado um degrau de 30% da potência máxima na Resistência 1.

A **Figura 5.15** ilustra resposta real da planta quando variado o sinal de controle de 20 para 30% da potência máxima. Novamente, como a temperatura foi mensurada em apenas 5 pontos da planta (Sensores LM35), foi feita uma interpolação linear para se obter a temperatura entre esses pontos.

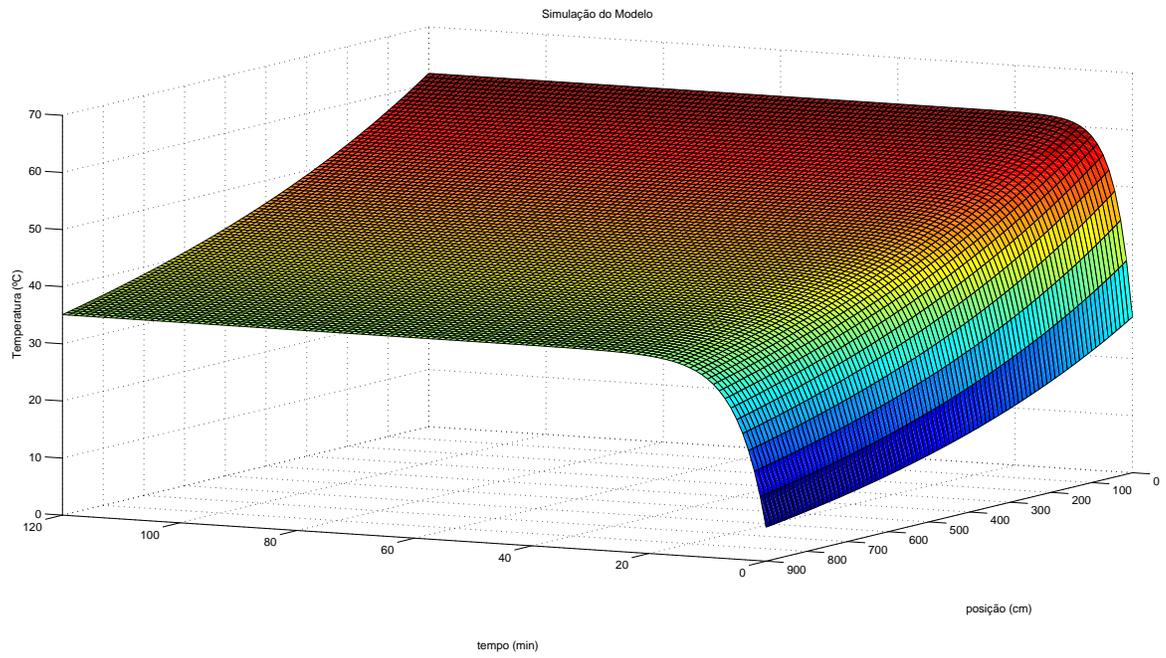


Figura 5.14: Simulação do Modelo.

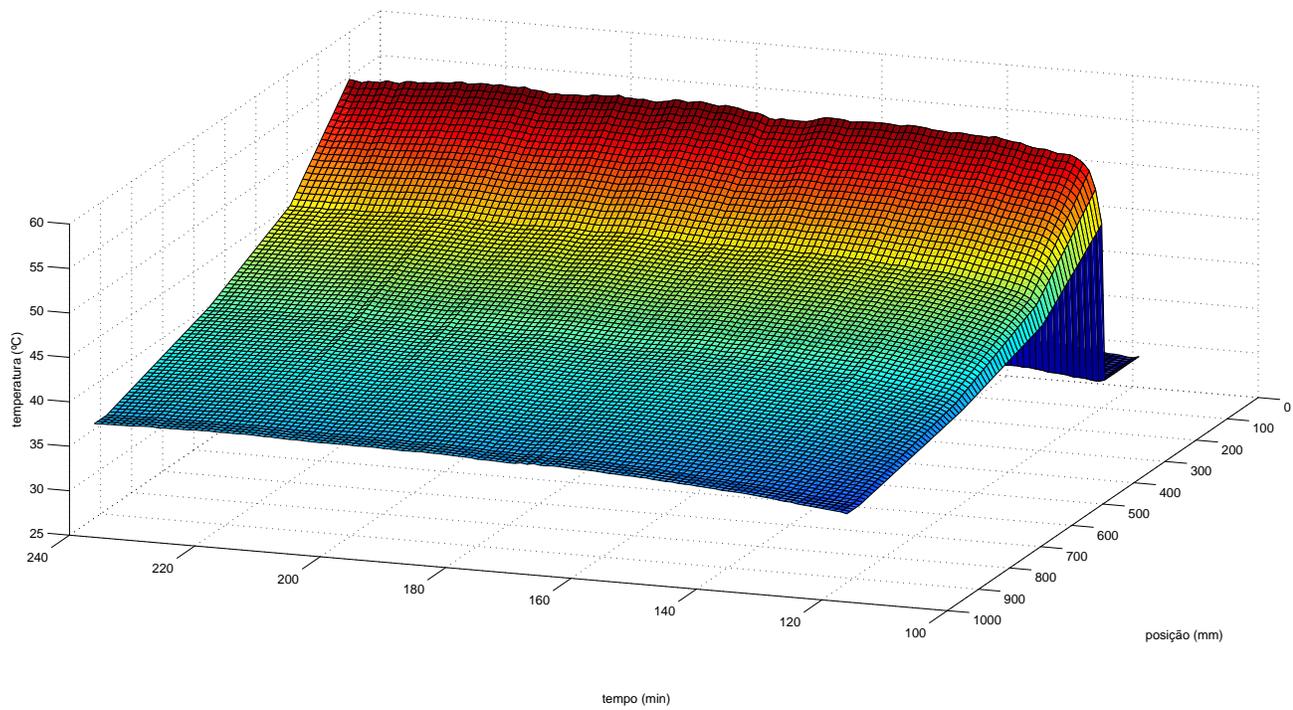


Figura 5.15: Resposta do Sistema.

Para uma comparação rápida do modelo com a dinâmica real da planta, foi realizado

outro ensaio com duração de 10 horas. Neste ensaio, entretanto, foram utilizados os Circuitos Termopares com a ponta de medição inserida no interior da planta, de forma a medir a temperatura interna em outros 6 pontos distintos. As posições em que as pontas dos cabos dos Circuitos Termopares foram instaladas são apresentadas na **Tabela 5.3**.

Tabela 5.3: Localização das pontas dos Circuitos Termopares.

Termopar	Posição (cm)
1	357
2	532
3	455
4	240
5	648
6	788

A posição em que encontram-se instalados os Sensores LM35 já foram apresentadas nas **Tabelas 5.1 e 5.2**.

Neste ensaio, a planta foi acionada inicialmente com uma potência de 20% da potência máxima e esperou-se 2 horas até que a mesma estabilizasse. Após estabilizar, deu-se dois degraus positivos de 10% da potência máxima, com intervalos de 2 horas entre cada um, e, em seguida, outros dois degraus negativos de 10% da potência máxima, também com intervalos de 2 horas entre cada um. Desta forma, a planta operou, respectivamente, com 20, 30, 40, 30 e 20 % da potência máxima. As medições feitas pelos Sensores LM35 e pelos Circuitos Termopares são apresentados nas **Figuras 5.16 e 5.17**.

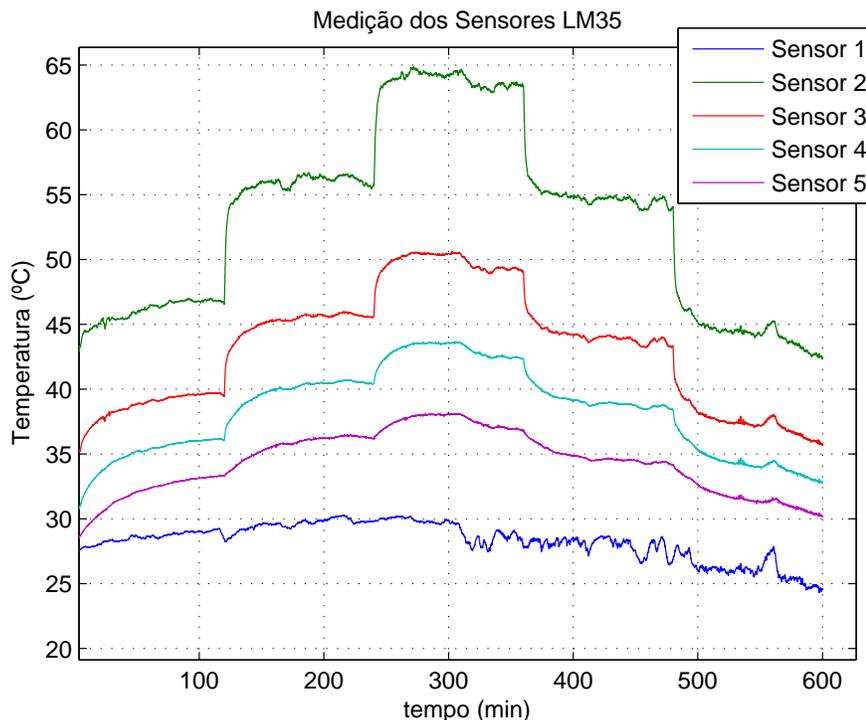


Figura 5.16: Medições feitas pelos Sensores LM35.

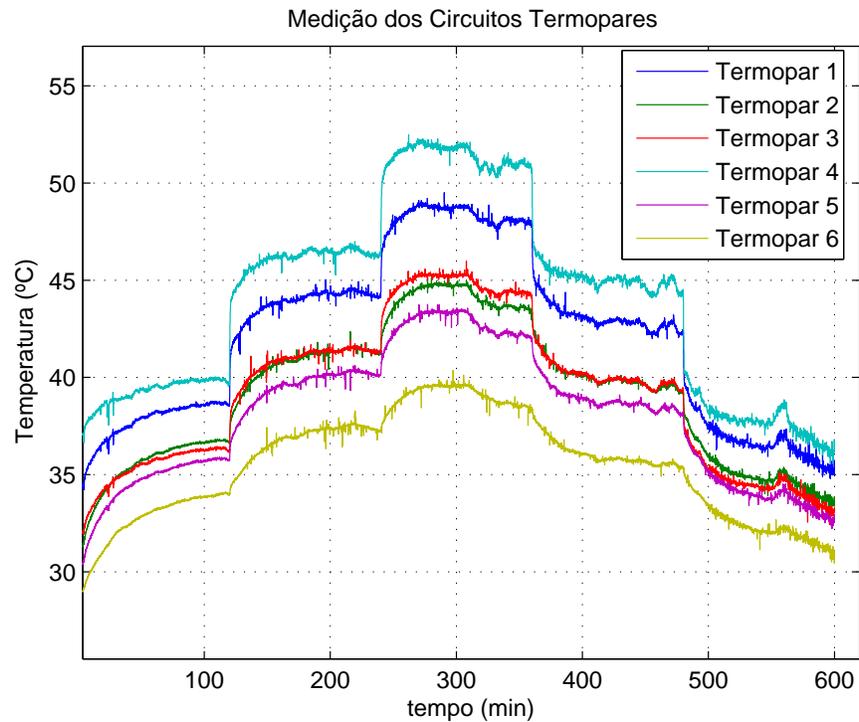


Figura 5.17: Medições feitas pelos Circuitos Termopares.

As **Figuras 5.18, 5.19 e 5.20** ilustram uma comparação entre o Modelo e o Sistema real, bem como o erro, nas posições  $x=138\text{cm}$ ,  $x=330\text{cm}$  e  $x=920\text{cm}$ , respectivamente.

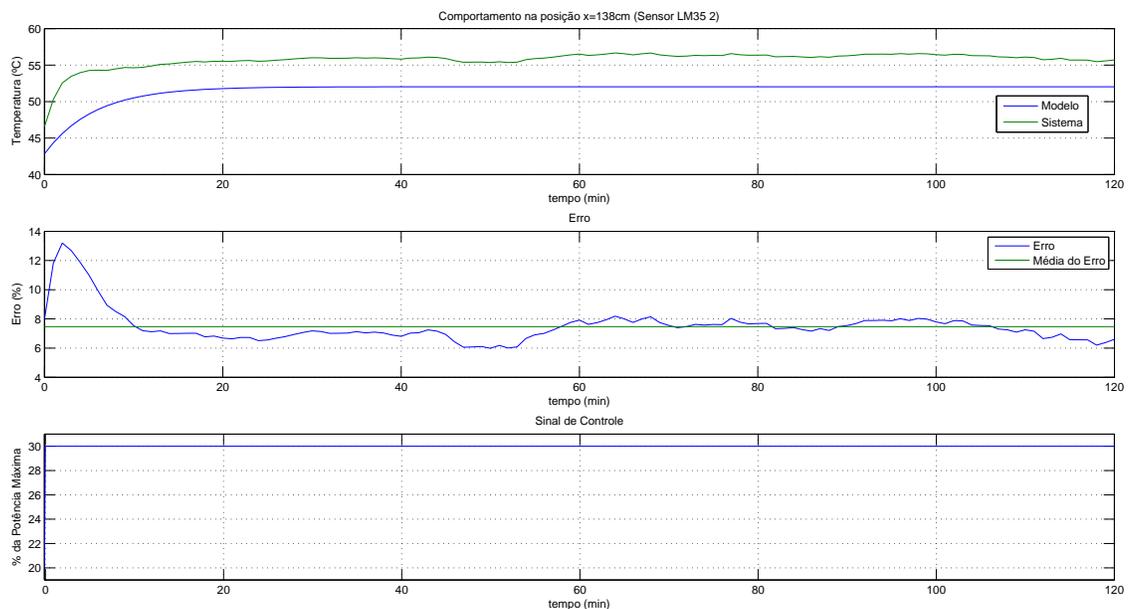


Figura 5.18: Comparação do Modelo de 1ª Ordem na posição  $x=138\text{cm}$ .

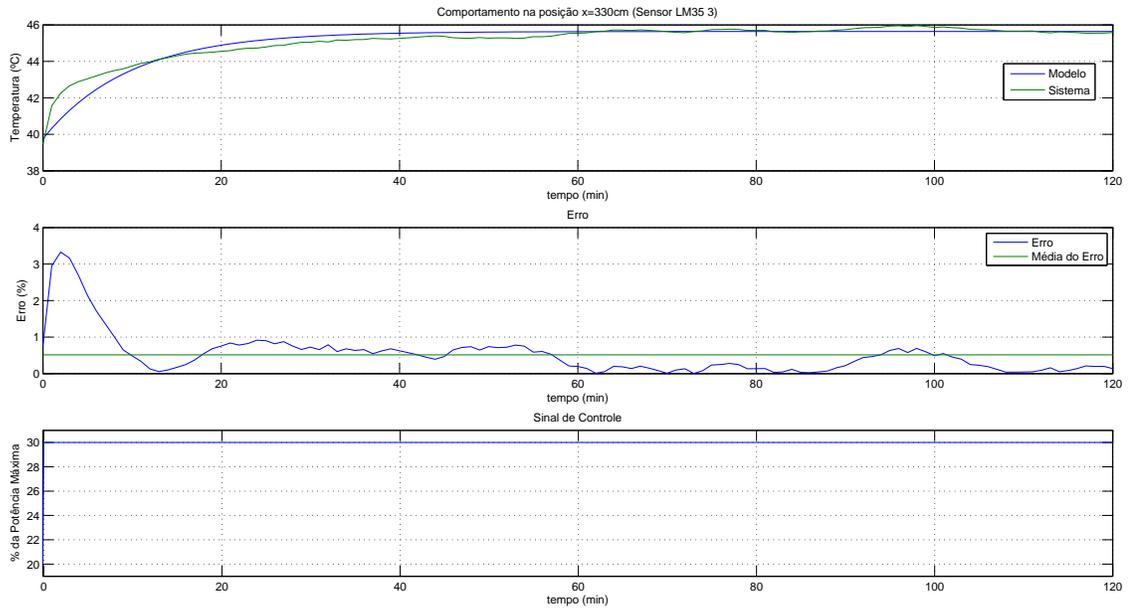


Figura 5.19: Comparação do Modelo de 1ª Ordem na posição  $x=330\text{cm}$ .

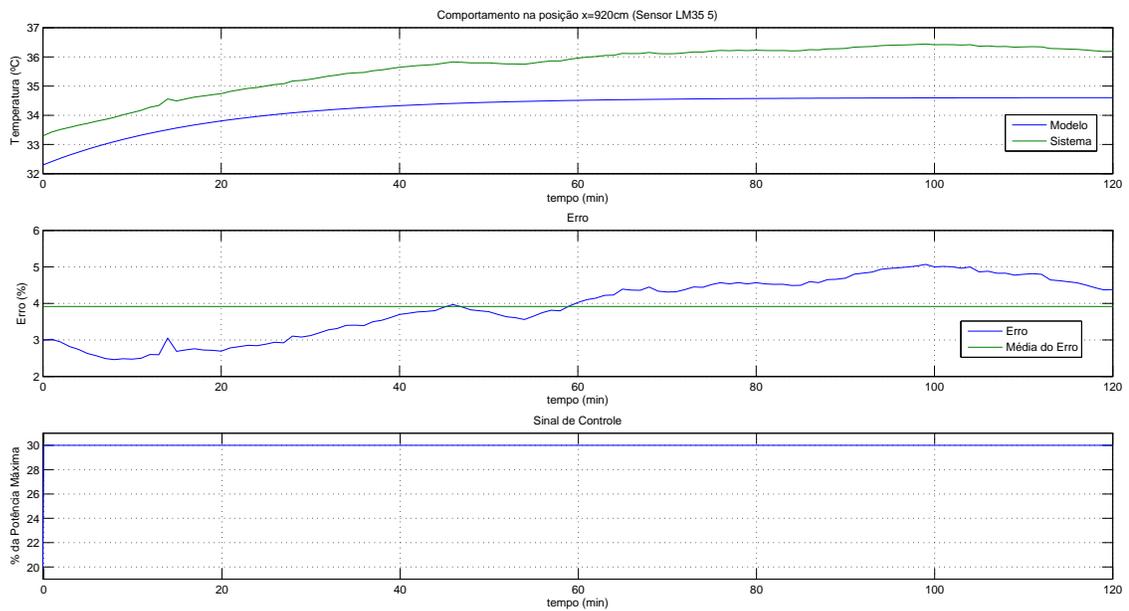


Figura 5.20: Comparação do Modelo de 1ª Ordem na posição  $x=920\text{cm}$ .

Vale a pena ressaltar que o erro de *offset* presente nas **Figuras 5.18, 5.19 e 5.20** deve-se à interpolação feita na **Equação 5.9**, e não ao modelo em si.

## 5.5 Projeto do Controlador

Conforme já especificado, o controlador a ser projetado deve fazer com que a dinâmica da planta:

- seja pelo menos duas vezes mais rápida; e
- tenha erro nulo em regime permanente.

Desta forma, foi projetado um controlador PI, utilizando o Método da Síntese Direta, considerando  $\tau_d = \tau/2$ , para uma resposta duas vezes mais rápida, e  $\theta_d = \theta$ , para o atraso mínimo possível. Logo, o controlador obtido foi

$$G_c(x, s) = \frac{\tau(x)s + 1}{K(x)(0,5\tau(x) + \theta(x))s}. \quad (5.10)$$

As **Figuras 5.21, 5.22 e 5.23** ilustram a resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada, utilizando o controlador apresentado na **Equação 5.24**, nas posições  $x=138\text{cm}$ ,  $x=330\text{cm}$  e  $x=920\text{cm}$ , respectivamente.

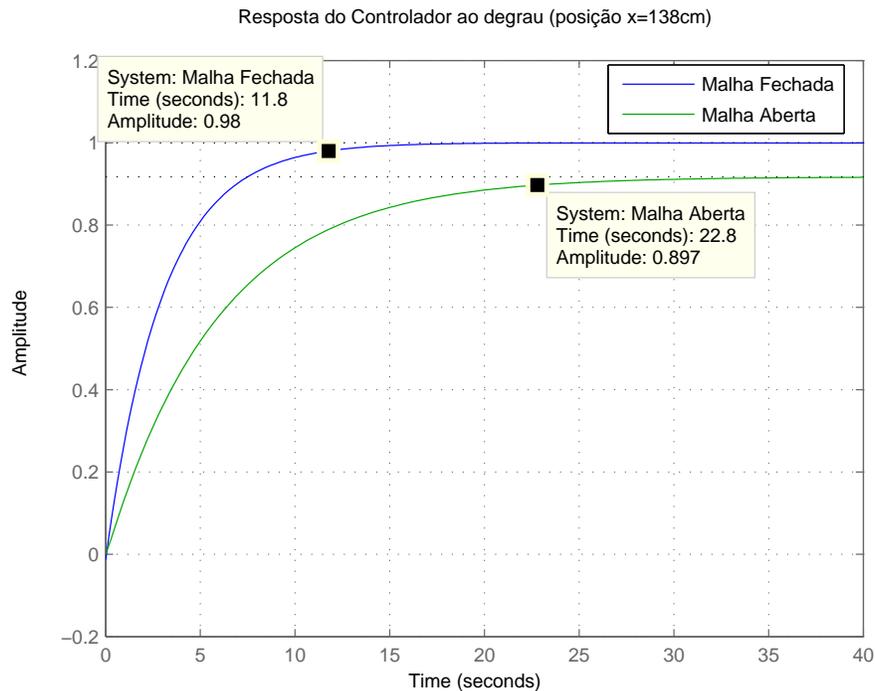


Figura 5.21: Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada (posição  $x=138\text{cm}$ ).

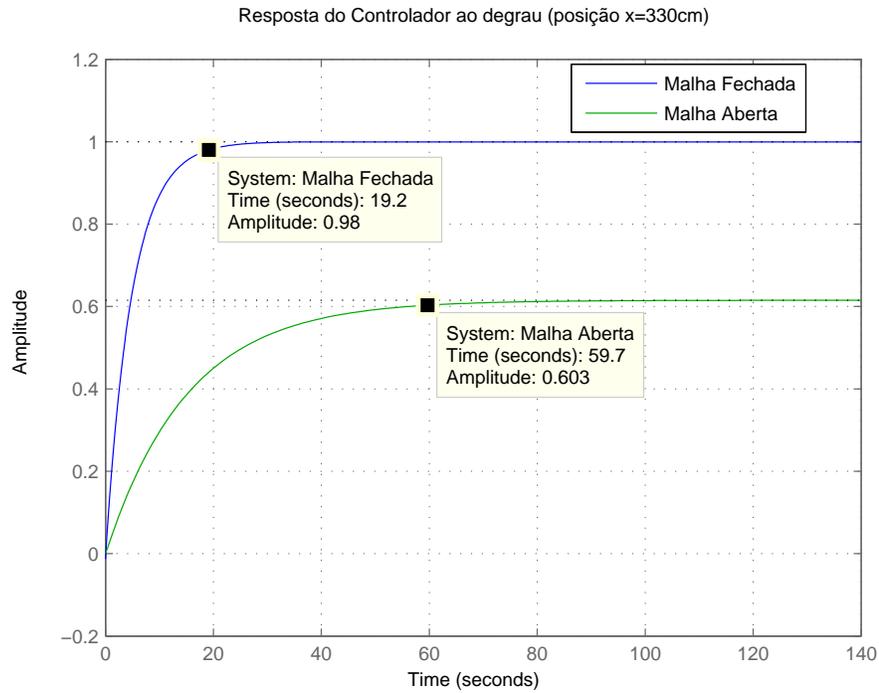


Figura 5.22: Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada (posição x=330cm).

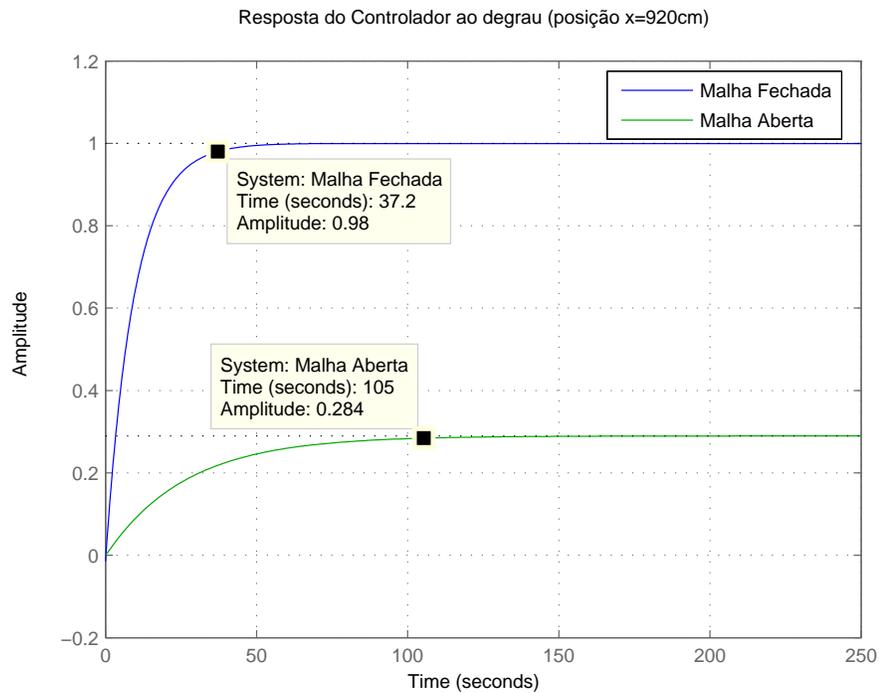


Figura 5.23: Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada (posição x=920cm).

Pode-se constatar que o controlador projetado atende às especificações de projeto.

A **Figura 5.24** ilustra a estrutura proposta para o controle da planta.

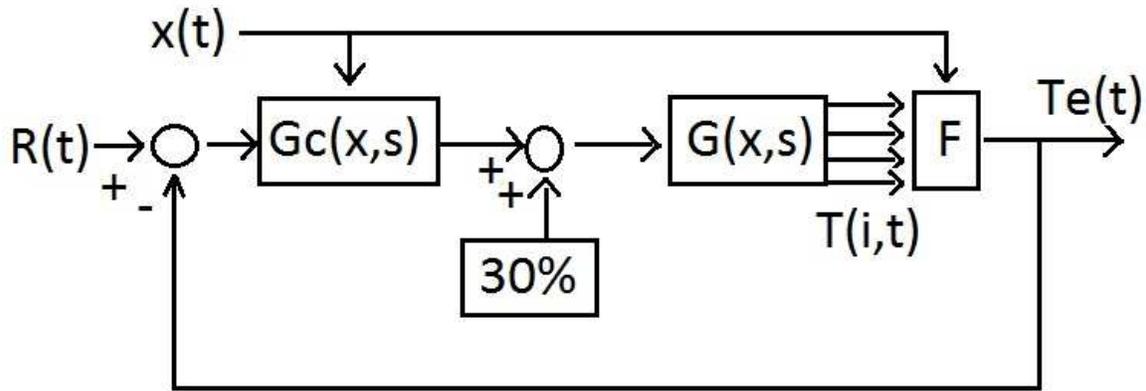


Figura 5.24: Estrutura do Controlador Proposto.

Nessa estrutura,  $R(t)$  é a temperatura de referência e  $x(t)$  é a posição na qual se deseja controlar a temperatura. Note que tanto  $R(t)$  quanto  $x(t)$  são vetores em função do tempo, ou seja, é possível controlar a temperatura em determinado ponto durante um intervalo de tempo e, em outro intervalo de tempo, controlar a temperatura em outra posição. O controlador recebe um sinal de erro e a posição em que se deseja controlar a temperatura, e retorna um sinal de controle que, após somado ao ponto de operação em que a planta foi modelada (30% da potência máxima), é aplicado na planta (potência aplicada na Resistência 1). A planta retorna quatro sinais de referência  $T(i,t)$ , com  $i=1$  a 4, que é a leitura dos sensores LM35 2 a 5. Esses sinais de referência são interpolados, a cada amostragem, no bloco  $F$ , o qual retorna a temperatura estimada  $T_e(t)$  no ponto  $x(t)$  em que se está controlando a planta. Essa temperatura estimada  $T_e(t)$  é comparada com a temperatura de referência  $R(t)$ , e um novo sinal de erro é gerado.

Essa estrutura não foi implementada na planta devido ao tempo escasso. Essa implementação é proposta como perspectiva do projeto.



## Considerações Finais

### 6.1 Discussão dos Resultados

Conforme proposto no Resumo, foram apresentados neste trabalho dois modelos matemáticos a parâmetros distribuídos para a planta de aquecimento de ar.

O primeiro modelo, encontrado a partir das EDFs, proposta por (Leite et al.), dependeu a grande parte dos esforços empregados neste trabalho. Devido à não linearidade da planta e à sua geometria, constatou-se um resultado não condizente com a prática. Para uma melhor aplicação desta técnica, talvez seria interessante considerar apenas uma seção reta da planta, evitando assim, trocas de calor excessiva nas "quinas".

O segundo modelo, mesmo sendo de 1ª Ordem e obtido a partir de uma técnica mais simples, se mostrou satisfatório.

Devido ao tempo escasso e às dificuldades encontradas ao longo deste trabalho, nenhum dos modelos obtidos foi validado analiticamente, apenas visualmente.

### 6.2 Perspectivas

Amparados pelos resultados apresentados neste trabalho, muitos projetos de pesquisa, em especial na área de Modelagem Matemática, poderão ser desenvolvidas na planta aqui tratada. Várias abordagens podem ser adotadas visando a melhoria do modelo obtido, dentre elas:

- Implementar o Controlador obtido;
- Aprimorar a interpolação da parcela  $T_0$  com a utilização dos circuitos termopares;
- Interpolar os parâmetros de um modelo de 2ª Ordem para obter o modelo a parâmetros distribuídos.

Muitos outros estudos de processos térmicos, em plantas diversas, poderão ser desenvolvidos a partir do conhecimento aqui produzido. Os Circuitos Termopares, já calibrados, poderão ser utilizados como sensores térmicos de contato nas mais variadas plantas.



## O Circuito Termopar

A configuração adotada para o CI AD594AQ é mostrada na **Figura A.1**.

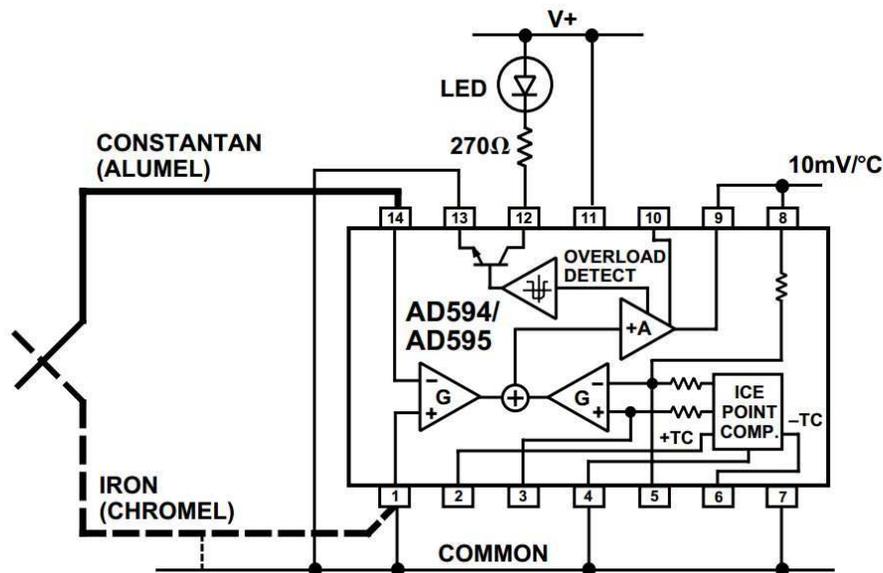


Figura A.1: Configuração adotada para o CI AD594AQ - Fonte: Datasheet do CI AD594AQ

O cabo termopar é ligado nos pinos 1 e 14, conforme mostra a **Figura A.1**, não podendo se inverter a ordem dos dois. A alimentação (5V) é ligada no pino 11, enquanto que a saída é medida nos pinos 8 e 9, que ficam em curto. O terra da alimentação, da saída e da entrada são comuns.

Esse circuito retorna 10mV a cada 1°C e já conta com uma compensação em 0°C. Além disso, essa configuração possui um LED indicador que é acionado sempre que o cabo termopar estiver em aberto, caso haja mal contato no conector.

Foi incluída nessa configuração um filtro RC com constante de tempo de 220ms ( $R=10K\Omega$  e  $C=22\mu F$ ) e um *jumper* para habilitar ou não esse filtro. O cabo de cada circuito termopar mede 63cm.

O diagrama elétrico do circuito completo é mostrado na **Figura A.2**.

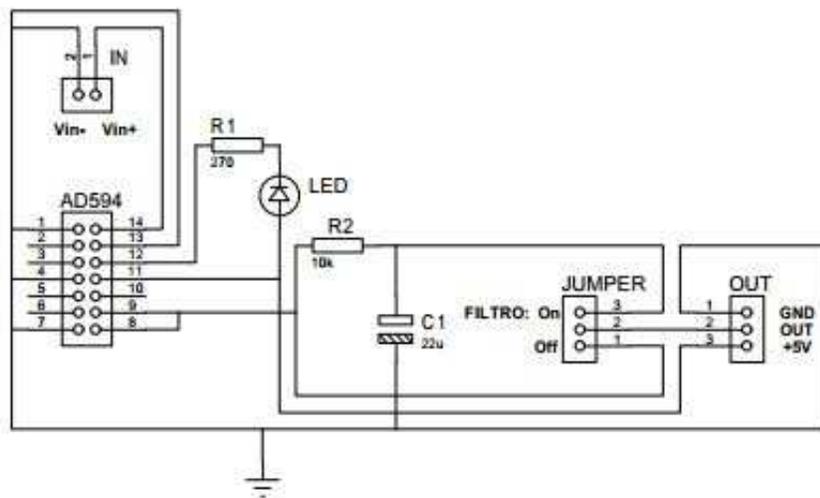


Figura A.2: Diagrama elétrico do Circuito Termopar

## Algoritimos

### B.1 Dinâmica do Acrílico

```
%% TCC Jônathas - Degraus para Obtenção do Modelo - 21/01/2014
% Objetivo: Obter o Modelo
clc
close all
clear all
%%

load DegrauAcrilico.mat;
dados=DegrauAcrilico;

%% Utilizando a Calibração Feita
Cal_Term=[93.9109 .8182;93.6383 1.4822;96.2809 -.0222;94.8384 -.2075;93.6271
.0263;94.5403 .0668];
Cal_LM35=[99.355 -.4016;101.0179 -.4121;101.0749 -.3647;97.1902 .4754;
100.5313 -.5503];

tempo=dados(:,1)/60;
Sensor1=Cal_LM35(1,1)*dados(:,2)+Cal_LM35(1,2);
Sensor2=Cal_LM35(2,1)*dados(:,3)+Cal_LM35(2,2);
Sensor3=Cal_LM35(3,1)*dados(:,4)+Cal_LM35(3,2);
Sensor4=Cal_LM35(4,1)*dados(:,5)+Cal_LM35(4,2);
Sensor5=Cal_LM35(5,1)*dados(:,6)+Cal_LM35(5,2);
Termopar1=Cal_Term(1,1)*dados(:,7)+Cal_Term(1,2);
Termopar2=Cal_Term(2,1)*dados(:,8)+Cal_Term(2,2);
Termopar3=Cal_Term(3,1)*dados(:,9)+Cal_Term(3,2);
Termopar4=Cal_Term(4,1)*dados(:,10)+Cal_Term(4,2);
Termopar5=Cal_Term(5,1)*dados(:,11)+Cal_Term(5,2);
Termopar6=Cal_Term(6,1)*dados(:,12)+Cal_Term(6,2);
```

```
%% Plotando os dados coletados
figure
plot(tempo,Termopar1,tempo,Termopar2,tempo,Termopar3,tempo,Termopar4,tempo,
Termopar5,tempo,Termopar6)
legend('Termopar 1','Termopar 2','Termopar 3','Termopar 4','Termopar 5',
'Termopar 6')
ylabel('Tensão dos Sensores (V)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
```

```
figure
plot(tempo,Sensor1,tempo,Sensor2,tempo,Sensor3,tempo,Sensor4,tempo,Sensor5)
legend('Sensor 1','Sensor 2','Sensor 3','Sensor 4','Sensor 5')
ylabel('Tensão dos Sensores (V)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
```

```
%% Projetos do Filtro
t=0:0.1:tempo(end)*60;
t(end+1:75756) = t(end-9:end)+1;
```

```
sys = tf(pi,[1 pi]);
sys10 = tf(pi/10,[1 pi/10]);
```

```
Term1_filtro = lsim(sys,Termopar1,t);
Term2_filtro = lsim(sys,Termopar2,t);
Term3_filtro = lsim(sys,Termopar3,t);
Term4_filtro = lsim(sys,Termopar4,t);
Term5_filtro = lsim(sys,Termopar5,t);
Term6_filtro = lsim(sys,Termopar6,t);
```

```
Term1_filtro10 = lsim(sys10,Termopar1,t);
Term2_filtro10 = lsim(sys10,Termopar2,t);
Term3_filtro10 = lsim(sys10,Termopar3,t);
Term4_filtro10 = lsim(sys10,Termopar4,t);
Term5_filtro10 = lsim(sys10,Termopar5,t);
Term6_filtro10 = lsim(sys10,Termopar6,t);
```

```
%% Plotando o Termopar 4
```

```

figure
plot(tempo,Term4_filtro10)
legend('Termopar 4')
ylabel('Teperatura (°C)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
title('Medição do Termopar 4')
axis([0 130 20 33])
print -depsc Degrau_Acrilico.eps

```

```

%% Método da Resposta Complementar - Obtendo um modelo de 1ª Ordem

```

```

xi=60*600; % posição inicial do degrau
xf=80.41*600; % posição final do degrau
t2=tempo(xi:xf)-tempo(xi); % tempo deslocado
Degrau=Term4_filtro10(xi:xf);
u=10; % Variação no Sinal de Controle (em % da potência máxima)

```

```

K=(mean(Term4_filtro10(xf:end))-mean(Term4_filtro10(1:xi)))/u; % Ganho K
média das 1000 posições finais de cada degau
F=log((mean(Term4_filtro10(xf:end))-Degrau)/(K*u)); % ln((y(end)-y(t))/(K*u))
figure
plot(t2,F)
grid on

```

```

teta=1.408; % Atraso constatado visualmente (em min).

```

```

xiM=teta*600; % Define o ponto a partir do qual será aplicado o método no vetor Degrau.
xfM=12*600; % Define o ponto até o qual será aplicado o método no vetor Degrau.

```

```

p=polyfit(t2(xiM:xfM),F(xiM:xfM),1); % ajuste da curva
tau=-1/p(1); % Constante de Tempo (em min).

```

```

figure % Plotando os gráficos do Método com as retas ajustadas
plot(t2,F)
hold on
plot(t2,p(1)*t2+p(2),'r')
grid on
xlabel('tempo (min)')
title('Método da Resposta Complementar - Acrílico')

```

```
hold off

Sys=tf([K],[tau 1]); % Definindo os sistemas de 1ª Ordem
set(Sys,'inputdelay',teta); % Incluindo os atrasos

% Plotando os Modelos Obtidos com o Método da Resposta Complementar
figure
plot(t2,(Degrau-Degrau(1))/u,'r')
hold on
step(Sys)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura Normalizada')
title('Resposta do Modelo 1 para o Acrílico')
legend('Dados Reais','Modelo')
axis([0 21 -0.6 0.8])
```

## B.2 Obtenção do Modelo através das EDPs

```
% TCC Jonathas 14/01/2014
% Simulação da Equação encontrada

clc
close all
clear all

%% Parâmetros Físicos da Equação

R=1; %constante dos gases
cv=0.057; % Calor específico do ar
v=0.5; % velocidade do fluxo de ar
Kacr=5; % Condutividade térmica do acrílico
L=0.005; % espessura do acrílico
Li=[1 2 4]; % posição de cada uma das três resistências
Pi=[900 900 900]; % Potência máxima de cada uma das três resistências
tau=0.050; %Constante de tempo do acrílico

%% Parâmetros da simulação

dx=0.1; % Espaço de amostragem
dt=0.05; % Tempo de amostragem
```

```
%% Condições iniciais

t=0:dt:16;
x=0:dx:6.3;

tr=1.25*120*t;
xr=8;

T=zeros(size(x,2),size(t,2));
Qmat=zeros(size(x,2),size(t,2));
T(:,1)=23; % considerando todo o forno a 23°C no instante 0s.
T(1,:)=23; % considerando temperatura constante de 23°C durante todo o tempo.

%% Equação obtida em 21/01/2014
P=-0.01*Kacr*dx/L; %Relacionado à perda pelo acrílico
a=-0.1*(1+R/cv)*v;
A1=dt*(a/dx+P+1/dt);
A2=-a*dt/dx;
A3=-dt*P;
A4=dt;
a=0.50;%(1+R/cv)*v;

F_in=7;%Fator de correção da entrada para compesar o valor final da temperatura.
for i=2:size(x,2)

if x(i)==Li(1)
    sigma=[Pi(1);0;0];
elseif x(i)==Li(2)
    sigma=[0;Pi(2);0];
elseif x(i)==Li(3)
    sigma=[0;0;Pi(3)];
else
    sigma=[0;0;0];
end
for j=1:size(t,2)-1

    if t(j)<2 % Sinal de entrada durante o tempo
        q=[.2 0 0];
    elseif t(j)>=2 & t(j)<4
        q=[.3 0 0];
    elseif t(j)>=4 & t(j)<6
```

```

        q=[.4 0 0];
elseif t(j)>=6 & t(j)<8
        q=[.3 0 0];
elseif t(j)>=8 & t(j)<10
        q=[.2 0 0];
elseif t(j)>=10 & t(j)<12
        q=[.3 0 0];
elseif t(j)>=12 & t(j)<14
        q=[.4 0 0];
elseif t(j)>=14 & t(j)<16
        q=[.3 0 0];
else
        q=[.2 0 0];
end

U(i,j+1)=0.090*q*sigma; % Sinal de controle
Qmat(i,j+1)=(1-dt/tau)*Qmat(i,j)-dt*Kacr*(T(i,j)-T(1,j));
T(i,j+1)=T(i,j)+dt*(-a*(T(i,j)-T(i-1,j))/dx+Qmat(i,j+1)+F_in*U(i,j+1));
end
end

%% Simulação

figure
surf(t,x,T);
hold on
xlabel('tempo')
ylabel('posição')
zlabel('Temperatura')

figure
plot(x,T(:,1),x,T(:,21),x,T(:,41),x,T(:,61),x,T(:,81),x,T(:,101),x,T(:,121))
hold on
legend('t=1','t=3','t=5','t=7','t=9','t=11','t=13','t=15')
grid on
xlabel('posição (m)')
ylabel('Temperatura (°C)')

```

### B.3 Degrau na Planta 21/01/2014

```
%% TCC Jônathas - Degraus para Obtenção do Modelo - 21/01/2014
```

```
% Objetivo: Obter o Modelo
clc
close all
clear all
%%

load modelo.mat;
dados_total=modelo;
dados=dados_total(1:572.5*60*10,:); % às 07h20min do dia 22/01/14 foi ligado
%o ar condicionado do Lab. de Sinais e Sistemas, causando ruídos na rede, motivo pelo
%qual o resto do ensaio foi desconsiderado.

%% Utilizando a Calibração Feita
Cal_Term=[93.9109 .8182;93.6383 1.4822;96.2809 -.0222;94.8384 -.2075;93.6271 .0263;
94.5403 .0668];
Cal_LM35=[99.355 -.4016;101.0179 -.4121;101.0749 -.3647;97.1902 .4754;100.5313 -.5503];

tempo=dados(:,1)/60;
Sensor1=Cal_LM35(1,1)*dados(:,2)+Cal_LM35(1,2);
Sensor2=Cal_LM35(2,1)*dados(:,3)+Cal_LM35(2,2);
Sensor3=Cal_LM35(3,1)*dados(:,4)+Cal_LM35(3,2);
Sensor4=Cal_LM35(4,1)*dados(:,5)+Cal_LM35(4,2);
Sensor5=Cal_LM35(5,1)*dados(:,6)+Cal_LM35(5,2);
Termopar1=Cal_Term(1,1)*dados(:,7)+Cal_Term(1,2);
Termopar2=Cal_Term(2,1)*dados(:,8)+Cal_Term(2,2);
Termopar3=Cal_Term(3,1)*dados(:,9)+Cal_Term(3,2);
Termopar4=Cal_Term(4,1)*dados(:,10)+Cal_Term(4,2);
Termopar5=Cal_Term(5,1)*dados(:,11)+Cal_Term(5,2);
Termopar6=Cal_Term(6,1)*dados(:,12)+Cal_Term(6,2);

%% Plotando os dados coletados
figure
plot(tempo,Termopar1,tempo,Termopar2,tempo,Termopar3,tempo,Termopar4,tempo,Termopar5,
tempo,Termopar6)
legend('Termopar 1','Termopar 2','Termopar 3','Termopar 4','Termopar 5','Termopar 6',
'location','best')
ylabel('Temperatura (°C)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
title('Medição dos Termopares')
print -depsc Degrau_Termopares.eps
```

```

figure
plot(tempo,Sensor1,tempo,Sensor2,tempo,Sensor3,tempo,Sensor4,tempo,Sensor5)
legend('Sensor 1','Sensor 2','Sensor 3','Sensor 4','Sensor 5','location','best')
ylabel('Temperatura (°C)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
title('Medição dos Sensores LM35')
print -depsc Degrau_LM35.eps
%% Projetos do Filtro
t=0:0.1:tempo(end)*60;
t(343500) = t(end)+0.1;

sys = tf(pi,[1 pi]);
sys10 = tf(pi/10,[1 pi/10]);

Term1_filtro = lsim(sys,Termopar1,t);
Term2_filtro = lsim(sys,Termopar2,t);
Term3_filtro = lsim(sys,Termopar3,t);
Term4_filtro = lsim(sys,Termopar4,t);
Term5_filtro = lsim(sys,Termopar5,t);
Term6_filtro = lsim(sys,Termopar6,t);

Term1_filtro10 = lsim(sys10,Termopar1,t);
Term2_filtro10 = lsim(sys10,Termopar2,t);
Term3_filtro10 = lsim(sys10,Termopar3,t);
Term4_filtro10 = lsim(sys10,Termopar4,t);
Term5_filtro10 = lsim(sys10,Termopar5,t);
Term6_filtro10 = lsim(sys10,Termopar6,t);

figure
hold on
plot(tempo,Termopar1)
plot(tempo,Term1_filtro,'r')
plot(tempo,Term1_filtro10,'g')
legend('Termopar 1 sem filtro','Termopar 1 com filtro (Fc=3.140rad/s)','Termopar 1 com
filtro (Fc=0.314rad/s)','location','best')
ylabel('Temperatura (°C)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
axis([0 600 24 40])
hold off
title('Medição do Termopar 1')

```

```

print -depsc Termopar1_Filtro.eps

figure
plot(tempo,Term1_filtro10,tempo,Term2_filtro10,tempo,Term3_filtro10,tempo,
Term4_filtro10,tempo,Term5_filtro10,tempo,Term6_filtro10)
legend('Termopar 1','Termopar 2','Termopar 3','Termopar 4','Termopar 5','Termopar 6',
'location','best')
ylabel('Temperatura (°C)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
axis([0 600 24 40])
title('Medição dos Termopares - Sinais Filtrados')
print -depsc Termopares_Filtrados.eps

%% Observando a dinâmica da planta em um degrau específico
LMin=138000;
LMout=216060;
figure
plot(tempo(LMin:LMout),Sensor2(LMin:LMout),'g')
ylabel('Temperatura (°C)')
xlabel('tempo (min)')
axis([tempo(LMin) tempo(LMout) 55 67])
grid on
title('Sensor LM35 2')
print -depsc Degrau_especifico_LM35.eps

%% Diferença de temperatura nas superfícies do acrílico

Qmat=[Sensor2-Term1_filtro10 Sensor3-Term2_filtro10 Sensor4-Term4_filtro10
Sensor5-Term6_filtro10];

figure
plot(tempo,Qmat(:,1),tempo,Qmat(:,2),tempo,Qmat(:,3),tempo,Qmat(:,4))
legend('Sensor LM35 2','Sensor LM35 3','Sensor LM35 4','Sensor LM35 5' ,
'location','best')
ylabel('Diferença de Temperatura (°C)')
xlabel('tempo (min)')
grid on
title('Diferença de Temperatura nas superfícies interna e externa do Acrílico')
print -depsc Qmat.eps

%% Gerando a Figura em 3D

```

```

dx=10;
dt=1;

x=0:dx:940;
t=0:dt:tempo(end);

T=zeros(length(x),length(t));

for j=1:572
    T(1:13,j)=Sensor1(600*j);
    for i=13:33
        T(i,j)=(Sensor3(600*j)-Sensor2(600*j))/(20*dx)*(i-12)*dx+Sensor2(600*j);
    end
    for i=33:59
        T(i,j)=(Sensor4(600*j)-Sensor3(600*j))/(26*dx)*(i-32)*dx+Sensor3(600*j);
    end
    T(59:92,j)=Sensor4(600*j);
    for i=59:92
        T(i,j)=(Sensor5(600*j)-Sensor4(600*j))/(33*dx)*(i-58)*dx+Sensor4(600*j);
    end
    T(92:end,j)=Sensor5(600*j);
end
T(:,end)=Sensor5(end);
figure
surf(t,x,T)
hold on
xlabel('tempo (min)')
ylabel('posição (mm)')
zlabel('temperatura (°C)')
print -depsc ModeloEDP

```

## B.4 Obtenção dos Modelos de 1ª Ordem

```

%% TCC Jônathas - Modelos Concentrados - 11/02/2014
% Objetivo: Obter Modelo Concentrados para posterior interpolação
clc
close all
clear all
%%

```

```

load modelo.mat;
dados_total=modelo;
dados=dados_total(1:572.5*60*10,:); % às 07h20min do dia 22/01/14 foi ligado o
%ar condicionado do Lab. de Sinais e Sistemas, causando ruídos na rede,
%motivo pelo qual o resto do ensaio foi desconsiderado.

%% Utilizando a Calibração Feita
Cal_Term=[93.9109 .8182;93.6383 1.4822;96.2809 -.0222;94.8384 -.2075;93.6271
.0263;94.5403 .0668];
Cal_LM35=[99.355 -.4016;101.0179 -.4121;101.0749 -.3647;97.1902 .4754;
100.5313 -.5503];

tempo=dados(:,1)/60;
Sensor1=Cal_LM35(1,1)*dados(:,2)+Cal_LM35(1,2);
Sensor2=Cal_LM35(2,1)*dados(:,3)+Cal_LM35(2,2);
Sensor3=Cal_LM35(3,1)*dados(:,4)+Cal_LM35(3,2);
Sensor4=Cal_LM35(4,1)*dados(:,5)+Cal_LM35(4,2);
Sensor5=Cal_LM35(5,1)*dados(:,6)+Cal_LM35(5,2);
Termopar1=Cal_Term(1,1)*dados(:,7)+Cal_Term(1,2);
Termopar2=Cal_Term(2,1)*dados(:,8)+Cal_Term(2,2);
Termopar3=Cal_Term(3,1)*dados(:,9)+Cal_Term(3,2);
Termopar4=Cal_Term(4,1)*dados(:,10)+Cal_Term(4,2);
Termopar5=Cal_Term(5,1)*dados(:,11)+Cal_Term(5,2);
Termopar6=Cal_Term(6,1)*dados(:,12)+Cal_Term(6,2);

t=0:0.1:tempo(end)*60;
t(343500) = t(end)+0.1;

sys10 = tf(pi/10,[1 pi/10]); % Filtro com frequência de corte de pi/10

Term1_filtro10 = lsim(sys10,Termopar1,t);
Term2_filtro10 = lsim(sys10,Termopar2,t);
Term3_filtro10 = lsim(sys10,Termopar3,t);
Term4_filtro10 = lsim(sys10,Termopar4,t);
Term5_filtro10 = lsim(sys10,Termopar5,t);
Term6_filtro10 = lsim(sys10,Termopar6,t);

%% Método da Resposta Complementar - Obtendo um modelo de 1ª Ordem

xi=1200*60; % posição inicial do degrau
xf=2400*60; % posição final do degrau
t2=tempo(xi:xf)-tempo(xi); % tempo deslocado

```

```

Degrau=[Sensor2(xi:xf) Sensor3(xi:xf) Sensor4(xi:xf) Sensor5(xi:xf)]; % Matriz dos Degraus
u=10; % Variação no Sinal de Controle (em % da potência máxima)
for i=1:4
    K(i)=(mean(Degrau(end-300:end,i))-Degrau(1,i))/u; % Ganho K média das 1000
    %posições finais de cada degau
    F(:,i)=log((mean(Degrau(end-1000:end,i))-Degrau(:,i))/(K(i)*u));
    % ln((y(end)-y(t))/(K*u))
    figure
    plot(t2,F(:,i))
    grid on
end

teta=[0.0450 0.0500 0.105 0.130]; % Atraso constatado visualmente (em min).

xiM=teta*600; % Define o ponto a partir do qual será aplicado o método no vetor Degrau.
xfM=[11.12 24.35 38.23 33.72]*600; % Define o ponto até o qual será aplicado o método
%no vetor Degrau.

for i=1:4
p(i,:)=polyfit(t2(xiM(i):xfM(i)),F(xiM(i):xfM(i),i),1); % ajuste da curva
tau(i)=-1/p(i,1); % Constante de Tempo (em min).

figure          % Plotando os gráficos do Método com as retas ajustadas
plot(t2,F(:,i))
hold on
plot(t2,p(i,1)*t2+p(i,2),'r')
grid on
xlabel('tempo (min)')
title('Método da Resposta Complementar')
hold off
end

Sys1=tf([K(1)],[tau(1) 1]); % Definindo os sistemas de 1ª Ordem
Sys2=tf([K(2)],[tau(2) 1]);
Sys3=tf([K(3)],[tau(3) 1]);
Sys4=tf([K(4)],[tau(4) 1]);
set(Sys1,'inputdelay',teta(1)); % Incluindo os atrasos
set(Sys2,'inputdelay',teta(2));
set(Sys3,'inputdelay',teta(3));
set(Sys4,'inputdelay',teta(4));

%% Plotando os Modelos Obtidos com o Método da Resposta Complementar

```

```
figure
plot(t2, (Degrau(:,1)-Degrau(1,1))/u, 'r')
hold on
step(Sys1)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura Normalizada')
title('Resposta do Modelo 1 para a posição do Sensor 2')
```

```
figure
plot(t2, (Degrau(:,2)-Degrau(1,2))/u, 'r')
hold on
step(Sys2)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura Normalizada')
title('Resposta do Modelo 2 para a posição do Sensor 3')
```

```
figure
plot(t2, (Degrau(:,3)-Degrau(1,3))/u, 'r')
hold on
step(Sys3)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura Normalizada')
title('Resposta do Modelo 3 para a posição do Sensor 4')
```

```
figure
plot(t2, (Degrau(:,4)-Degrau(1,4))/u, 'r')
hold on
step(Sys4)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura Normalizada')
title('Resposta do Modelo 4 para a posição do Sensor 5')
```

```
%% Interpolação dos parâmetros
```

```
pos=[130 330 590 920]; % Vetor com as posições dos Sensores LM35 2 a 5
x=0:1000;
```

```
pk=polyfit(pos,K,2);
figure
plot(pos,K, 'x')
hold on
plot(x, pk(1)*x.^2+pk(2)*x+pk(3), 'r')
```

```

grid on
xlabel('Posição (cm)')
ylabel('K')
title('Interpolação do Ganho K')
legend('Parâmetro obtido','Curva ajustada')

pteta=polyfit(pos,teta,2);
figure
plot(pos,teta,'x')
hold on
plot(x,pteta(1)*x.^2+pteta(2)*x+pteta(3),'r')
grid on
xlabel('Posição (cm)')
ylabel('teta (min)')
title('Interpolação do Atraso')
legend('Parâmetro obtido','Curva ajustada')

ptau=polyfit(pos,tau,2);
figure
plot(pos,tau,'x')
hold on
plot(x,ptau(1)*x.^2+ptau(2)*x+ptau(3),'r')
grid on
xlabel('Posição (cm)')
ylabel('tau (min)')
title('Interpolação da Constante de Tempo')
legend('Parâmetro obtido','Curva ajustada')

%% Simulando o modelo

u=30; % Entrada em % da potência máxima
x=0:10:900; % Vetor posição
t2=0:60; % tempo de simulação
T=zeros(length(x),length(t2)); % Inicializando a matriz temperatura
T(1:11,:)=23; % Temperatura ambiente antes da 1ª Resistencia
for i=11:length(x)
    Kx = (0.0120*i^2-21*i+11467)*10^(-4);
    Tetax = (1.2373*i+232.85)*1e-4;
    taux = (-0.0518*i^2+222*i+29784)*1e-4;
    desl=28*exp(-i/60); % Condição inicial
    T(i,:)=Kx*(1-exp(-(t2-Tetax)/taux))*u+desl;
end

```

```
figure
surf(t2,x,T)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('posição (cm)')
zlabel('Temperatura (°C)')
title('Simulação do Modelo')
```

## B.5 Comparação dos Modelos de 1ª Ordem

```
%% TCC Jônathas - Modelo de 1ª Ordem a Parâmetros Distribuídos - 18/02/2014
% Objetivo: Comparar o Modelo de 1ª Ordem a parâmetros distribuídos
clc
close all
clear all

%% 0 Ensaio feito

load valida.mat;
dados=valida(1:600*10*60,:);

%% Utilizando a Calibração Feita
Cal_Term=[93.9109 .8182;93.6383 1.4822;96.2809
-.0222;94.8384 -.2075;93.6271 .0263;
94.5403 .0668];
Cal_LM35=[99.355 -.4016;101.0179 -.4121;101.0749 -.3647;97.1902 .4754;
100.5313 -.5503];

tempo=dados(:,1)/60;
Sensor1=Cal_LM35(1,1)*dados(:,2)+Cal_LM35(1,2);
Sensor2=Cal_LM35(2,1)*dados(:,3)+Cal_LM35(2,2);
Sensor3=Cal_LM35(3,1)*dados(:,4)+Cal_LM35(3,2);
Sensor4=Cal_LM35(4,1)*dados(:,5)+Cal_LM35(4,2);
Sensor5=Cal_LM35(5,1)*dados(:,6)+Cal_LM35(5,2);
Termopar1=Cal_Term(1,1)*dados(:,7)+Cal_Term(1,2);
Termopar2=Cal_Term(2,1)*dados(:,8)+Cal_Term(2,2);
Termopar3=Cal_Term(3,1)*dados(:,9)+Cal_Term(3,2);
Termopar4=Cal_Term(4,1)*dados(:,10)+Cal_Term(4,2);
Termopar5=Cal_Term(5,1)*dados(:,11)+Cal_Term(5,2);
Termopar6=Cal_Term(6,1)*dados(:,12)+Cal_Term(6,2);

t=0:0.1:tempo(end)*60;
```

```

t(360000) = t(end)+0.1;

sys10 = tf(pi/10,[1 pi/10]); % Filtro com frequência de corte de pi/10

Term1_filtro10 = lsim(sys10,Termopar1,t);
Term2_filtro10 = lsim(sys10,Termopar2,t);
Term3_filtro10 = lsim(sys10,Termopar3,t);
Term4_filtro10 = lsim(sys10,Termopar4,t);
Term5_filtro10 = lsim(sys10,Termopar5,t);
Term6_filtro10 = lsim(sys10,Termopar6,t);

Sensor1_filtro10 = lsim(sys10,Sensor1,t);
Sensor2_filtro10 = lsim(sys10,Sensor2,t);
Sensor3_filtro10 = lsim(sys10,Sensor3,t);
Sensor4_filtro10 = lsim(sys10,Sensor4,t);
Sensor5_filtro10 = lsim(sys10,Sensor5,t);

%% 0 Modelo Obtido

u=30; % Entrada em % da potência máxima
x=0:10:900; % Vetor posição
t2=0:120; % tempo de simulação
T=zeros(length(x),length(t2)); % Inicializando a matriz temperatura
T(1:11,:)=23; % Temperatura ambiente antes da 1ª Resistencia

for i=1:length(x)
    Kx = (0.0120*i^2-21*i+11467)*10^(-4);
    Tetax = (1.2373*i+232.85)*1e-4;
    taux = (-0.0518*i^2+222*i+29784)*1e-4;
    desl=28*exp(-i/60); % Condição inicial
    T(i,:)=Kx*(1-exp(-(t2-Tetax)/taux))*u+desl;
end

figure
surf(t2,x,T)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('posição (cm)')
zlabel('Temperatura (°C)')
title('Simulação do Modelo')

%% Plotando as Medições dos Sensores e Termopares

```

```
figure
plot(tempo,Sensor1_filtro10,tempo,Sensor2_filtro10,tempo,
Sensor3_filtro10,tempo,
Sensor4_filtro10,tempo,Sensor5_filtro10)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Medição dos Sensores LM35')
grid on
legend('Sensor 1','Sensor 2','Sensor 3','Sensor 4','Sensor 5')
```

```
figure
plot(tempo,Term1_filtro10,tempo,Term2_filtro10,tempo,
Term3_filtro10,tempo,Term4_filtro10,
tempo,Term5_filtro10,tempo,Term6_filtro10)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Medição dos Circuitos Termopares')
grid on
legend('Termopar 1','Termopar 2','Termopar 3','Termopar 4',
'Termopar 5','Termopar 6')
```

```
%% Comparando o Modelo com os dados reais
```

```
xi=120*60*10; % posição inicial do degrau a ser tratado
%120 min*60(segundos)*10(frequencia de amostragem)
xf=240*60*10; % posição final do degrau a ser tratado
```

```
% Matrizes Sensor e Termopar no degrau tratado
MatSensor=[Sensor1_filtro10(xi:600:xf) Sensor2_filtro10(xi:600:xf)
Sensor3_filtro10(xi:600:xf) Sensor4_filtro10(xi:600:xf)
Sensor5_filtro10(xi:600:xf)];
MatTermo=[Term1_filtro10(xi:600:xf) Term2_filtro10(xi:600:xf)
Term3_filtro10(xi:600:xf)
Term4_filtro10(xi:600:xf) Term5_filtro10(xi:600:xf) Term6_filtro10(xi:600:xf)];
u2=1;
figure
plot(t2,T(13,:),t2,MatSensor(:,2))
xlabel('tempo (min)')
ylabel('Temperatura (°C)')
title('Comportamento na posição x=138cm (Sensor LM35 2)')
grid on
```

```
legend('Modelo', 'Sistema')
```

## B.6 Projeto do Controlador

```
%% TCC Jônathas - Degraus para Obtenção do Modelo - 25/02/2014
% Objetivo: Projetar o Controlador
clc
close all
clear all

%% 0 Ensaio feito

load valida.mat;
dados=valida(1:600*10*60,:);

%% Utilizando a Calibração Feita
Cal_Term=[93.9109 .8182;93.6383 1.4822;96.2809 -.0222;94.8384
-.2075;93.6271 .0263;94.5403 .0668];
Cal_LM35=[99.355 -.4016;101.0179 -.4121;101.0749 -.3647;97.1902
.4754;100.5313 -.5503];

tempo=dados(:,1)/60;
Sensor1=Cal_LM35(1,1)*dados(:,2)+Cal_LM35(1,2);
Sensor2=Cal_LM35(2,1)*dados(:,3)+Cal_LM35(2,2);
Sensor3=Cal_LM35(3,1)*dados(:,4)+Cal_LM35(3,2);
Sensor4=Cal_LM35(4,1)*dados(:,5)+Cal_LM35(4,2);
Sensor5=Cal_LM35(5,1)*dados(:,6)+Cal_LM35(5,2);
Termopar1=Cal_Term(1,1)*dados(:,7)+Cal_Term(1,2);
Termopar2=Cal_Term(2,1)*dados(:,8)+Cal_Term(2,2);
Termopar3=Cal_Term(3,1)*dados(:,9)+Cal_Term(3,2);
Termopar4=Cal_Term(4,1)*dados(:,10)+Cal_Term(4,2);
Termopar5=Cal_Term(5,1)*dados(:,11)+Cal_Term(5,2);
Termopar6=Cal_Term(6,1)*dados(:,12)+Cal_Term(6,2);

t=0:0.1:tempo(end)*60;
t(360000) = t(end)+0.1;

sys10 = tf(pi/10,[1 pi/10]); % Filtro com frequência de corte de pi/10

Term1_filtro10 = lsim(sys10,Termopar1,t);
Term2_filtro10 = lsim(sys10,Termopar2,t);
```

```

Term3_filtro10 = lsim(sys10,Termopar3,t);
Term4_filtro10 = lsim(sys10,Termopar4,t);
Term5_filtro10 = lsim(sys10,Termopar5,t);
Term6_filtro10 = lsim(sys10,Termopar6,t);

Sensor1_filtro10 = lsim(sys10,Sensor1,t);
Sensor2_filtro10 = lsim(sys10,Sensor2,t);
Sensor3_filtro10 = lsim(sys10,Sensor3,t);
Sensor4_filtro10 = lsim(sys10,Sensor4,t);
Sensor5_filtro10 = lsim(sys10,Sensor5,t);

xi=120*60*10; % posição inicial do degrau a ser tratado
%120 min*60(segundos)*10(frequencia de amostragem)
xf=240*60*10; % posição final do degrau a ser tratado

%% Encontrando as condições iniciais T0
% Matrizes Sensor e Termopar no degrau tratado
MatSensor=[Sensor1_filtro10(xi:600:xf) Sensor2_filtro10(xi:600:xf)
Sensor3_filtro10(xi:600:xf) Sensor4_filtro10(xi:600:xf) Sensor5_filtro10(xi:600:xf)];
MatTermo=[Term1_filtro10(xi:600:xf) Term2_filtro10(xi:600:xf) Term3_filtro10(xi:600:xf)
Term4_filtro10(xi:600:xf) Term5_filtro10(xi:600:xf) Term6_filtro10(xi:600:xf)];

T0=[MatSensor(1,2:5) MatTermo(1,:)];
xT0=[138 330 590 920 357 532 455 240 648 788];
pT0=polyfit(xT0,log(T0),1);
x0=0:1000;
KT0=exp(pT0(2));
tauT0=1/pT0(1);
figure
plot(xT0,T0,'x')
hold on
plot(x0,KT0*exp(x0/tauT0))

%% O Modelo Obtido
x=0:10:900; % Vetor posição
t2=0:120; % tempo de simulação
u=10; % Entrada em % da potência máxima

T=zeros(length(x),length(t2)); % Inicializando a matriz temperatura
T(1:11,:)=23; % Temperatura ambiente antes da 1ª Resistencia

```

```

for j=11:length(x)
    i=j*10;
    Kx = (0.0120*i^2-21*i+11467)*10^(-4);
    Tetax = (1.2373*i+232.85)*1e-4;
    taux = (-0.0518*i^2+222*i+29784)*1e-4;
    Tinicial=KT0*exp(i/tauT0); % Condição inicial
T(j,:)=Kx*(1-exp(-(t2-Tetax)/taux))*u+Tinicial;
G(j)=tf([-Kx*Tetax Kx],[taux 1]); % Série de Taylor truncada exp(-Tetax)=1-Tetax s
Gc(j)=tf([taux 1],Kx*[(0.5*tau+Tetax) 0]); % Controlador por Síntese Direta
end

figure
surf(t2,x,T)
xlabel('tempo (min)')
ylabel('posição (cm)')
zlabel('Temperatura (°C)')
title('Simulação do Modelo')

%% Método da Resposta Complementar - Obtendo um modelo de 1ª Ordem

xi=1200*60; % posição inicial do degrau
xf=2400*60; % posição final do degrau
t2=tempo(xi:xf)-tempo(xi); % tempo deslocado
Degrau=[Sensor2(xi:xf) Sensor3(xi:xf) Sensor4(xi:xf) Sensor5(xi:xf)]; % Matriz dos Degraus
u=10; % Variação no Sinal de Controle (em % da potência máxima)
for i=1:4
    K(i)=(mean(Degrau(end-300:end,i))-Degrau(1,i))/u;
    % Ganho K média das 1000 posições finais de cada degrau
    F(:,i)=log((mean(Degrau(end-1000:end,i))-Degrau(:,i))/(K(i)*u));
    % ln((y(end)-y(t))/(K*u))
    figure
    plot(t2,F(:,i))
    grid on
end

teta=[0.0450 0.0500 0.105 0.130]; % Atraso constatado visualmente (em min).

xiM=teta*600; % Define o ponto a partir do qual será aplicado o método no vetor Degrau.
xfM=[11.12 24.35 38.23 33.72]*600; % Define o ponto até o qual será
%aplicado o método no vetor Degrau.

```

```
for i=1:4
p(i,:)=polyfit(t2(xiM(i):xfM(i)),F(xiM(i):xfM(i),i),1); % ajuste da curva
tau(i)=-1/p(i,1); % Constante de Tempo (em min).
```

```
figure % Plotando os gráficos do Método com as retas ajustadas
plot(t2,F(:,i))
hold on
plot(t2,p(i,1)*t2+p(i,2),'r')
grid on
xlabel('tempo (min)')
title('Método da Resposta Complementar')
hold off
end
```

```
Sys1=tf([K(1)],[tau(1) 1]); % Definindo os sistemas de 1ª Ordem
Sys2=tf([K(2)],[tau(2) 1]);
Sys3=tf([K(3)],[tau(3) 1]);
Sys4=tf([K(4)],[tau(4) 1]);
set(Sys1,'inputdelay',teta(1)); % Incluindo os atrasos
set(Sys2,'inputdelay',teta(2));
set(Sys3,'inputdelay',teta(3));
set(Sys4,'inputdelay',teta(4));
```

```
%% Plotando os Modelos em MA e MF
```

```
figure
step(feedback(G(14)*Gc(14),1))
hold on
step(Sys1)
grid on
legend('Malha Fechada','Malha Aberta')
title('Resposta do Controlador ao degrau (posição x=138cm)')
```

```
figure
step(feedback(G(33)*Gc(33),1))
hold on
step(Sys2)
grid on
legend('Malha Fechada','Malha Aberta')
title('Resposta do Controlador ao degrau (posição x=330cm)')
```

```
figure
```

```
step(feedback(G(91)*Gc(91),1))  
hold on  
step(Sys4)  
grid on  
legend('Malha Fechada','Malha Aberta')  
title('Resposta do Controlador ao degrau (posição x=920cm)')
```

# Bibliografia

- J. C. Barbosa. Modelagem matemática: O que é? por que? como? *Veritati*, (4):73–80, 2004.  
URL <http://www.uefs.br/nupemm/veritati.pdf>.
- R. BRONSON and G. COSTA. *Equações Diferenciais*. ARTMED Editora S.A., 3rd edition, 2008.
- E. O. Doebelin. *Measurement Systems, Application and Design*. McGRAW-HILL International Editions, 4th edition, 1990.
- F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, and A. S. Lavine. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. LTC, 6th edition, 2013.
- V. J. S. Leite, C. Prieur, and E. Witrant. Pde model of a fan. 2011, em preparação.
- J. D. Simeão. Controle de sistemas com atrasos nos estados: uma abordagem convexa. Master's thesis, Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2009.
- G. F. Simmons and S. G. Krantz. *Equações Diferenciais, Teoria, Técnica e Prática*. McGRAW-HILL Interamericana do Brasil Ltda, 1st edition, 2008.
- D. G. Zill and M. R. Cullen. *Equações Diferenciais*. Pearson Education do Brasil, 3rd edition, 2001.