

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
Campus DIVINÓPOLIS
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECATRÔNICA

Ester Queiroz Alvarenga

ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS PARA ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS
MECATRÔNICOS SUJEITOS À SATURAÇÃO



Divinópolis-MG
2022

Ester Queiroz Alvarenga

ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS PARA ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS
MECATRÔNICOS SUJEITOS À SATURAÇÃO

Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Colegiado de Graduação em Engenharia Mecatrônica como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Engenheira Mecatrônica.

Eixo de Formação: Controle de Processos e Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite

Coorientador: Prof. Dr. Luís Filipe Pereira Silva



Divinópolis-MG

2022

Ester Queiroz Alvarenga

Candidata a Engenharia Mecatrônica

CEFET/MG *Campus* Divinópolis

ESTUDO COMPARATIVO DE MÉTODOS PARA ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS
MECATRÔNICOS SUJEITOS À SATURAÇÃO

Monografia apresentada à Faculdade de Engenharia Mecatrônica como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Graduada em Engenharia Mecatrônica.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET/MG *Campus V*

Prof. Dr. Nelson de Figueiredo Barroso
CEFET/MG *Campus V*

Romulo José da Silva Júnior
CEFET/MG *Campus V*

Divinópolis-MG

2022

AOS MEUS FAMILIARES, QUE ME
APOIARAM E INCENTIVARAM NESSA
JORNADA.

Agradecimentos

Agradeço,

à minha família: minha mãe Elmavonice, meu pai Eliel, meu irmão Eivyd e meu irmão Eisteyn, pelo incentivo e confiança em mim depositada, e por compreenderem a distância e ausência durante a produção deste trabalho;

aos meus orientadores Valter Leite e Luís Silva por todos os ensinamentos, suporte e paciência com a qual guiaram o meu aprendizado;

aos meus queridos amigos Bernado Bresolini e Carla Castro, com quem convivi intensamente durante os últimos anos, pelo incrível companheirismo e pela troca de experiências, que me permitiram crescer como graduanda e pessoa;

aos meus colegas de trabalho: Marcela Coelho, Marcus Vinícius, Arthur Nunes, Filipe Gonçalves, Josef Poth, Thiago Vinícius, Alysson Aurélio, Victor Coelho e Karen Alana por compartilharem comigo bons momentos de risada e descobertas, além da troca de conhecimentos;

à todos os professores que contribuíram para a minha formação;

à todos que de alguma forma contribuíram com meu progresso.

Você não pode mudar o vento, mas pode ajustar
as velas do barco para chegar onde quer.

Confúcio

Resumo

A saturação do atuador, presente na maioria dos sistemas reais, seja por limitação física ou por segurança, é um desafio para o projetista do sistema de controle, visto que a presença de saturação caracteriza uma não linearidade no processo. Essa condição, se negligenciada no projeto, pode causar instabilidade na malha fechada, causando perda de desempenho ou até mesmo provocar acidentes. Dessa forma, o estudo de técnicas para tratamento de sistemas submetidos à saturação é de suma importância para engenheiros que atuam na área de controle de processos. Tendo em vista o quadro descrito, o projeto proposto compara duas abordagens capazes de representar a saturação em amplitude de atuadores e ao mesmo tempo propiciar condições de análise de estabilidade e síntese de controladores: o modelo baseado na condição de setor e a recém proposta, representação implícita afim por partes. Tais técnicas são implementadas em um modelo de um sistema mecatrônico sujeito à saturação, para que seja possível avaliar e comparar as garantias de estabilidade proporcionada por ambos os métodos. Para tanto, são utilizados recursos bibliográficos e computacionais, fazendo o uso de resultados da álgebra linear, formulações de otimização convexas descritas em termo de LMIS e algoritmos. O processo mecatrônico utilizado é modelado matematicamente em conformidade com as leis da física, chegando a equações diferenciais que podem ser representadas em espaço de estado e assim viabilizar o projeto de controladores e a aplicação das abordagens em estudo. Portanto, o presente trabalho se encontra alinhado à Engenharia Mecatrônica, abrangendo duas das quatro grandes áreas que a compõem: Controle de Processos e Mecânica. Ambos os métodos foram capazes de representar a saturação do processo mecatrônico avaliado e fornecer condições de estabilidade para o sistema. A convergência obtida com a representação implícita foi bastante similar com a atingida com a condição de setor, que por ser uma abordagem já sustentada por uma base teórica sólida e resultados importante, atesta a eficácia do novo método. A nova representação ainda apresentou vantagens com relação a mais antiga, visto que a região de atração obtida com a mesma foi maior, proporcionando maiores opções de condições iniciais que geram trajetórias estáveis. Por outro lado, devido a um *loop* algébrico, há certa dificuldade em utilizar a representação implícita a fim

por partes, configurando uma desvantagem dessa abordagem com relação a condição de setor. Desse modo, o desenvolvimento desse projeto auxiliou na consolidação e divulgação da nova abordagem de representação afim por partes e apresentou vantagens e desvantagem de seu uso com relação a condição de setor.

Palavras-chave: Saturação de atuador. Sistemas afins por partes. Condição de setor. Modelagem matemática.

Abstract

Actuator saturation, present in most real systems, whether due to physical limitation or safety, is a challenge for the control system designer, since the presence of saturation characterizes a non-linearity in the process. This condition, if neglected in the design, can cause limit cycles, parasitic equilibrium points, and instability in the closed-loop, causing loss of performance or even causing accidents. Thus, the study of techniques for treating systems subjected to saturation is of paramount importance for engineers working in the area of process control. Because of the picture described, the proposed project seeks to compare two approaches capable of representing the saturation the amplitude of actuators and at the same time providing conditions for stability analysis and controller synthesis: the model based on the sector condition and the related implicit piecewise-affine representation. Such techniques are implemented in a model of a mechatronic system subject to saturation, so that it is possible to evaluate and compare the stability guarantees provided by both methods. Therefore, bibliographic and computational resources are used, making use of linear algebra results, convex optimization formulations described in terms of LMIS and algorithms. The mechatronic process used is mathematically modeled by the laws of physics, arriving at differential equations that can be represented in state space and thus enable the design of controllers and the application of the approaches under study. Therefore, this work is aligned with Mechatronics Engineering, covering two of the four major areas that comprise it: Process Control and Mechanics. Both methods were able to represent the saturation of the evaluated mechatronic process and provide stability conditions for the system. The convergence obtained with the implicit representation was quite similar to that achieved with the sector condition, which, as an approach already supported by a solid theoretical basis and important results, attests to the effectiveness of the new method. The new representation still presented advantages over the oldest, since the region of attraction obtained with it was larger, providing greater options for initial conditions that generate stable trajectories. On the other hand, due to an algebraic loop, there is some difficulty in using the implicit piecewise-affine representation, configuring a disadvantage of this approach in relation to the

sector condition. In this way, the development of this project helped in the consolidation and dissemination of the new approach of implicit piecewise-affine and presented advantages and disadvantages of its use in relation to the condition of the sector.

Key-words: Actuator saturation. Piecewise affine systems. Sector condition. Mathematical modeling.

Sumário

Lista de Figuras	xxi
Lista de Tabelas	xxiii
Lista de Acrônimos e Notação	xxv
1 Introdução	1
1.1 Definição do problema	2
1.2 Motivação	3
1.3 Objetivo Geral	3
1.4 Objetivos Específicos	3
1.5 Estado da arte	4
1.6 Metodologia	5
1.7 Organização do documento	5
2 Fundamentos	7
2.1 Revisão bibliográfica	7
2.2 Fundamentação teórica	8
2.2.1 Sistemas mecatrônicos	9
2.2.2 Sistemas submetidos à saturação	11
2.2.3 Estabilidade de sistemas	16
2.2.4 Modelagem por não-linearidade de setor	19
3 Estabilidade e Estabilização de Sistemas sob Saturação	23
3.1 Representação Implícita Afim por Partes	23
3.1.1 Funções PWA Contínuas Implícitas	24
3.1.2 Condições de estabilidade para sistemas implícitos afim por partes de tempo discreto	28

3.1.3	Análise de Estabilidade de Sistemas PWA com Funções Lyapunov PWQ	31
3.2	Abordagem por Não-Linearidade Setorial	34
3.2.1	Estabilidade	34
3.2.2	Estabilização	35
3.3	Implementação computacional	35
3.3.1	Estabilidade pela representação implícita afim por partes	36
3.3.2	Estabilidade pela abordagem de não-linearidade de setor	39
3.3.3	Estabilização a partir da abordagem de não-linearidade de setor	40
3.4	Aplicação em Sistema Mecatrônico Saturado	42
3.4.1	Sistema com Atuador Elástico	42
4	Conclusões e Perspectivas	53
4.1	Perspectivas e trabalhos futuros	54
A	Código para Análise do Sistema SEA - PWA	57

Lista de Figuras

2.1	Saturação (TARBOURIECH et al., 2011)	13
2.2	Regiões de linearidade (TARBOURIECH et al., 2011)	15
2.3	Zona morta (TARBOURIECH et al., 2011)	20
2.4	Não-linearidade de zona-morta: (a) no setor global; (b) no setor local. (TARBOURIECH et al., 2011)	21
3.1	Função de rampa $r(y_i)$ não linear (GROFF, 2020)	24
3.2	Partição de \mathbb{R}^2 para $f(x)$ definida em (3.11) (GROFF, 2020)	27
3.3	Atuador elástico em série(OH; KONG, 2017)	43
3.4	Sistema SEA como sistema de duas massas (OH; KONG, 2017)	45
3.5	Curvas de nível da função Lyapunov e trajetória do sistema SEA nos casos 1, 2, 3 e 4	49
3.6	Estados do sistema e sinal de controle do processo SEA	50
3.7	Aproximação do estado $x(k)$	51

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do atuador elástico considerado (OH; KONG, 2017)	46
-----	---	----

Lista de Acrônimos e Notação

LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Desigualdade Matricial Linear)
RAS	<i>Region Asymptotic Stability</i> (Região de Estabilidade Assintótica)
PWA	<i>Piecewise Affine</i> (Afim por Partes)
PWQ	<i>Piecewise Quadratic</i> (Quadrática por Partes)
SEA	<i>Series Elastic Actuator</i> (Atuador Elástico em Série)
MPC	<i>Model Predictive Control</i> (Controle Preditivo de Modelo)

★	indica bloco diagonal simétrico nas LMIs
$L > 0$	indica que a matriz quadrada L é simétrica definida positiva
$L \geq 0$	indica que a matriz quadrada L é simétrica semi-definida positiva
A	notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)
A^T	indica a operação de transposição da matriz ou vetor A
$M_{(i)}$	indica os elementos do vetor $M \in \mathbb{R}^n$, sendo $i = 1, \dots, n$
$x \succeq y, x, y \in \mathbb{R}^n$	significa que $x_i - y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$
$H = H^T$	H é uma matriz hermitiana
$\mathbb{P}^{n \times m}$	conjunto de matrizes com elementos não negativos
\mathbb{D}^n	conjunto de matrizes diagonais de dimensão $n \times n$
\mathbb{S}^n	conjunto de matrizes simétricas de dimensão $n \times n$

Introdução

Cada vez mais vêm sendo acrescentado controladores ou microcontroladores aos processos e dispositivos eletromecânicos, gerando assim os sistemas mecatrônicos, os quais possibilitam maior flexibilidade, eficiência e automação aos mecanismos. O controle desses processos proporciona mitigação de erros, estabilidade, redução de tempo de operação, dentre outros benefícios. Contudo, nem sempre essa é uma tarefa fácil. Os desafios presentes ao controlar um processo engloba a modelagem dos conjuntos mecânicos e eletrônicos, a estabilização dos sistemas e o tratamento de não linearidades.

Na maioria das plantas e processos reais, a energia disponível para o controle é finita, isso ocorre por razões de segurança ou por limitações físicas. Tal condição caracteriza o problema de saturação do atuador, essa não linearidade pode causar perda de desempenho e efeitos indesejáveis no sistema, como ciclos limite, pontos de equilíbrio parasita e até mesmo levar a malha fechada à instabilidade (TARBOURIECH et al., 2011, p. 5). Se os limites de saturação não forem tratados e considerados durante o projeto do controlador, a eficiência e a segurança operacional podem ser comprometidas. Destaca-se para o caso de saturação em amplitude de atuadores, a ocorrência de acidentes em aeronaves e o derretimento da usina nuclear de Chernobyl (TARBOURIECH et al., 2011, p. ix).

Ao longo dos anos, alguns métodos foram desenvolvidos para atenuar os efeitos indesejáveis causados pela saturação. Um método clássico consiste na implementação da ação anti-*windup* para controladores com ação integral, que tenta mitigar os efeitos negativos da saturação. Outras abordagens buscam utilizar ferramentas de sistemas lineares para desenvolver métodos para o tratamento de não linearidades. Nesse contexto, pesquisadores atuam na análise e modo de estabilização e na melhoria dos níveis de desempenho dos processos submetidos a tal condição. Dentre as abordagens desenvolvidas estão a abordagem baseada na condição de setor, capaz de representar a saturação do sis-

tema em malha fechada e a representação implícita afim por partes da malha de controle. Esta última é uma abordagem produzida recentemente e se propõe a suprir lacunas das representações explícitas (GROFF, 2020).

Porém, para que a saturação possa ser devidamente tratada e o sistema estabilizado, é necessário, primeiramente, obter a modelagem matemática do sistema, atingida a partir de leis da física, por meio da identificação do sistema via caixa preta ou por uma combinação, modelagem matemática e caixa preta, e agregar posteriormente a saturação do atuador. Esta etapa é indispensável para a análise do processo, pois permite determinar os fenômenos de causa e efeito que o envolvem. Contudo, os sistemas reais são majoritariamente complexos para serem descritos de forma matemática em sua totalidade, por isso, são feitas considerações para que o modelo seja simplificado. Do ponto de vista de controle, tais considerações se dão ao modelar apenas a dinâmica dominante, deixando dinâmicas mais rápidas e eventualmente outras não-linearidades menos significativas como perturbações que precisam ser rejeitadas pelo controlador.

1.1 Definição do problema

O problema a ser tratado neste trabalho consiste na análise de desempenho de dois métodos representativos de um sistema em malha fechada com saturação do sinal de controle. O primeiro é a representação implícita afim por partes em termos da função rampa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$, descrita matematicamente como

$$f(x) = F_1x + F_2\phi(y(x)) \quad (1.1)$$

$$y(x) = F_3x + F_4\phi(y(x)) + f_5 \quad (1.2)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $F_1 \in \mathbb{R}^{n_f \times n}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$, $F_3 \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $F_4 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $f_5 \in \mathbb{R}^{n_y}$ e a função vetorial $\phi : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é a função rampa definida por

$$\phi_i(y) = r(y_i) := \begin{cases} 0 & \text{if } y_i < 0 \\ y & \text{if } y_i \geq 0 \end{cases}, i = 1, \dots, n_y \quad (1.3)$$

O segundo método representa a malha fechada saturada a partir do modelo de não-linearidade setorial,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.4)$$

$$u(t) = \psi(v(t)) \quad (1.5)$$

$$v(t) = Kx(t) \quad (1.6)$$

para a não-linearidade $\psi(v(t)) = \text{sat}(v(t))$, a função saturação é descrita como

$$\text{sat}(v_{(i)}) = \begin{cases} u_{max(i)} & \text{se } v_{(i)} > u_{max(i)} \\ v_{(i)} & \text{se } -u_{min(i)} \leq v_{(i)} \leq u_{max(i)} \\ -u_{min(i)} & \text{se } v_{(i)} < -u_{min(i)} \end{cases} \quad (1.7)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

Com essas representações obtém-se condições de verificação de estabilidade e síntese de controladores. O desempenho de cada um deles é comparado aplicando-os ao modelo de um sistema mecatrônico com entrada saturada. Do qual, a representação dinâmica se obtém por meio de equações e parâmetros físicos do processo.

1.2 Motivação

A motivação para o presente trabalho parte da oportunidade de consolidação e compreensão de ferramentas para tratamento da saturação e análise da estabilidade de sistemas mecatrônicos com entradas saturadas, especialmente a proposta em (GROFF, 2020), no âmbito das pesquisas realizadas em sistemas sob saturação no campus Divinópolis.

1.3 Objetivo Geral

Nestes termos, é objetivo desta monografia comparar o desempenho da representação implícita afim por partes com o modelo baseado na condição de setor, no que tange ao tratamento da saturação para estabilização de sistemas mecatrônicos sujeitos à atuadores saturados. Evidenciando as vantagens e desafios de uma abordagem de representação em relação a outra.

1.4 Objetivos Específicos

Para tanto, é necessário:

- Revisar os princípios da representação implícita afim por partes;
- Revisar os princípios do modelo de condição de setor;
- Definir o processo mecatrônico ao qual se implementará as técnicas;
- Revisar métodos para modelagem de sistemas dinâmicos;
- Modelar o sistema mecatrônico;

- Implementar os métodos tratativos no sistema mecatrônico;
- Verificar a estabilidade da malha fechada;
- Analisar o desempenho da estimação da região de atração obtida com ambas as técnicas.

1.5 Estado da arte

De modo a atenuar os efeitos indesejáveis da saturação, algumas estratégias de representação matemática e de controle foram estudadas ao longo dos anos. Trabalhos atuais ainda aplicam técnicas desenvolvidas há mais de duas décadas, tais como o modelo politópico e o modelo de não linearidade de setor, que são formas de representar as não linearidades de saturação e permitem o desenvolvimento de métodos de análise da estabilidade e de controladores. Uma abordagem de controle por retroação de estados para a estabilização de sistemas lineares sob entrada saturada, empregando uma condição local de setor generalizada foi introduzida por Silva Junior e Tarbouriech (2005). A representação politópica da saturação se iniciou com os trabalhos de Hu e Lin (2001). Essas condições foram recentemente utilizadas em (RAN; WANG; DONG, 2016), (SALAVATI; GRIGORIADIS; FRANCKEK, 2021), (FIGUEIREDO et al., 2020) e (NGUYEN; DAMBRINE; LAUBER, 2014).

Outra vertente que visa tratar o problema de saturação em atuadores é a utilização do controle preditivo baseado em modelo (*Model Predictive Control* - MPC), que tem por objetivo calcular, de forma otimizada, uma trajetória para a variável manipulada do sistema, planejando o comportamento futuro ideal da saída da planta em uma janela móvel de avaliação temporal de tempo finito (WANG, 2009). A otimização realizada durante o MPC leva em consideração informações do histórico das ações de controle já executadas. Assim, são percebidas as limitações e restrições do sistema e é traçado a melhor maneira de atingir a referência desejada. Esse método é capaz de lidar com limitações na estrutura de controle, como a saturação em atuadores, pois as restrições são levadas em consideração durante a formulação do problema, evitando então, sua ocorrência. No MPC a otimização é realizada para cada atualização do sinal de controle, ao contrário das abordagens estudadas neste trabalho, em que o controlador é pre-determinado. Portanto, trata-se de uma abordagem mais trabalhosa do ponto de vista computacional do que as abordagens aqui investigadas. Dentre os trabalhos que utilizam esse método podem ser mencionados (LIU; WANG; GENG, 2020) e (HEDMAN; MERCORELLI, 2021).

1.6 Metodologia

Para a realização deste trabalho, tem-se como primeira etapa essencial, o entendimento dos conceitos necessários ao se tratar uma não linearidade do tipo saturação. Alguns desses conceitos são a região de linearidade, a região de atração e a teoria de Lyapunov. Esta etapa foi feita por meio de revisões bibliográficas, assim como o estudo da representação implícita afim por partes e do modelo baseado na condição de setor. Ambas as representações e as respectivas condições para análise de estabilidade, derivadas desses modelos, foram implementadas como problemas de otimização formulados em termos de LMIs.

As técnicas que lidam com a saturação foram aplicadas em um modelo de um sistema mecatrônico, selecionado a partir de artigos da área. Para a representação matemática deste, fez-se a revisão da modelagem dos sistemas dinâmicos, tais como mecânicos e elétricos (NORTON, 2011). Esse estudo se baseou nos conceitos básicos da área da mecânica dinâmica.

Uma vez implementadas as condições de análise da estabilidade dos métodos em estudo, para um controlador qualquer (projetado para levar o sistema às especificações desejadas), se fez uma comparação dos desafios e vantagens presentes em cada um deles. Ainda, se projetou um controlador para o sistema com base na condição de setor e se reavaliou a estabilidade do sistema com ambos os métodos. O desempenho de cada um foi examinado a partir da comparação das regiões de atração asseguradas em cada método.

1.7 Organização do documento

Este documento é composto por quatro capítulos. Neste primeiro foi apresentado o problema, a justificativa, os objetivos, o estado da arte e a metodologia a ser adotada. No capítulo seguinte é feita uma revisão bibliográfica sobre o tema e a fundamentação teórica necessária para a realização do estudo, com enfoque nos temas que não estão presentes na grade do curso de Engenharia Mecatrônica do CEFET-MG, *Campus V*. O terceiro capítulo traz o estudo das duas abordagens que fornecem condições para avaliar a estabilidade dos sistemas com atuador saturado: a nova representação implícita afim por partes proposta por Groff (2020) com suas respectivas condições para análise de estabilidade e as condições de setor que permitem avaliar a estabilidade e sintetizar um controlador para o sistema. Ainda no capítulo três, que configura os resultados deste trabalho, são apresentados os códigos que implementam as condições de análise de estabilidade, desempenho e estabilização. As condições são aplicadas em um sistema mecatrônico, cuja modelagem e descrição também é apresentada. Por fim, o capítulo quatro aborda as conclusões obtidas com o presente estudo e as perspectivas para continuidade

do trabalho.

Fundamentos

Este capítulo traz uma revisão da bibliografia do tema tratado, bem como a evolução das técnicas a serem utilizadas no trabalho, incluindo a base teórica necessária para o desenvolvimento do projeto.

2.1 Revisão bibliográfica

O problema de saturação do sinal de saída dos atuadores, que ocorre devido à limitações das características do componente ou por razões de segurança, causa perda de desempenho e insere não-linearidades na malha fechada do processo. Segundo Tarbouriech et al. (2011) mesmo que em malha aberta o sistema seja linear, o fechamento da malha com a presença do sinal de controle saturado torna o sistema não linear. Por essa razão, a comunidade acadêmica desenvolveu uma série de estudos que abordam o tratamento da saturação. Desde a metade do século XX até hoje, ocorreram inúmeras publicações de artigos neste tema. Porém, há poucos livros que se dedicaram especificamente a esse assunto, neste quesito destacam-se os livros de Tarbouriech et al. (2011), de Kapila e Grigoriadis (2002) e de Hu e Lin (2001). Em especial, o primeiro livro traz um compilado de várias abordagens tratativas para o problema de saturação e é utilizado como base no desenvolvimento do presente estudo.

De modo geral, descartados os métodos do tipo MPC, há dois métodos mais frequentemente encontrados na literatura para lidar com a saturação do atuador, o primeiro negligencia este aspecto durante o projeto do controlador e lida com a saturação acrescentando alguns esquemas específicos no processo já projetado, que tratam da ação anti-*windup* do sinal de controle (TEEL; ZACCARIAN, 2011). A segunda abordagem leva em consideração as não linearidades de saturação no início do projeto. A lei de controle, neste último caso, analisa o sistema em malha fechada com entrada saturada e redesenha o controlador de forma que o desempenho seja mantido enquanto a estabili-

dade é melhorada. O projeto do controlador pode ser feito de duas formas: 1) delimitando um conjunto de condições iniciais de forma a assegurar que o sinal de controle não terá (nunca) saturação (*saturation avoidance*); e 2) delimitando um conjunto de condições iniciais tais que o sinal de controle possa vir a saturar, mas a convergência para a origem das trajetórias iniciadas nesse conjunto é assegurada. Os livros de Tarbouriech et al. (2011) e Hu e Lin (2001) trazem abordagens que lidam com a saturação durante a fase de projeto do controlador.

Dentro dessa segunda abordagem existem diversos métodos de tratamento da saturação, sendo ressaltados aqui a representação politópica, a condição de setor e a representação implícita a fim por partes. A primeira utiliza de um conjunto politópico convexo para descrever a malha fechada do processo. Já a representação por condição de setor considera que a estabilidade de uma realimentação contém um sistema assintoticamente estável e uma não linearidade descentralizada sem memória. O trabalho do Paim et al. (2003) é um exemplo que utiliza da representação politópica e a condição de setor para lidar com o problema de saturação no atuador. Recentemente um novo método para tratar o problema de saturação do atuador foi introduzido por Groff (2020), utilizando como base a descrição da saturação por uma combinação de funções do tipo rampa, cujas propriedades são descritas por um conjunto particular de identidades e desigualdades.

Os métodos mencionados, além de representar a saturação de alguma forma, permitem o desenvolvimento de condições para análise da estabilidade do sistema, dada a não linearidade de entrada. Essa análise, para todas as abordagens, tem como base a teoria de Lyapunov, que define uma função de energia por meio da qual são verificadas as hipóteses: a energia tem de ser positiva e crescente na medida em que o estado se afasta da origem e ser nula quando o estado está na origem; a derivada tem de ser negativa (e no caso com não linearidade, tem de ser suficientemente negativa) quando o estado está fora da origem e nula quando o estado está na origem. Caso haja confirmação das hipóteses, pode-se dizer que existe uma região na qual o sistema tende para um ponto de equilíbrio quando o tempo tender ao infinito. Esta análise e métodos são geralmente implementados de forma numérica, baseando-se na solução de problemas de otimização convexa. Esse tipo de otimização possui métodos numericamente eficientes que são capazes de resolver o problema. Além disso, por ser convexo, há garantia de se encontrar o mínimo da função (convexa) a ser otimizada, diferentemente de uma otimização não convexa.

2.2 Fundamentação teórica

Dentre os conceitos importantes, necessários para o desenvolvimento do presente trabalho, estão os tópicos descritos no decorrer desta seção.

2.2.1 Sistemas mecatrônicos

Conforme a primeira descrição de mecatrônica, proposta em 1969 pela Companhia Elétrica Yasakawa e as seguintes definições, um sistema mecatrônico é um sistema dinâmico que combina elementos da mecânica, eletrônica, computação e controle. A revolução contínua e crescente da tecnologia da informação, o design de sensores inteligentes e a tecnologia de sistemas microeletromecânicos permitem, hoje, o aumento de novos produtos desenvolvidos na interseção das áreas da engenharia que a mecatrônica engloba e indicam que essa linha de projeto continuará a evoluir (BISHOP; BISHOP, 2002). Por tais motivos, os sistemas mecatrônicos se fazem cada vez mais presentes no mundo moderno, trazendo mais conforto, autonomia e versatilidade aos novos produtos e processos.

Para que o sistema dinâmico possa ser controlado, é essencial que se compreenda as dinâmicas de troca de potência e energia entre os elementos que compõem o processo. Esta relação pode ser obtida a partir de modelos matemáticos que são capazes de explicar, pelo menos de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente nos dados do sistema (KARNOPP; MARGOLIS; ROSENBERG, 2012). Tal representação possibilita a extração das melhores configurações para um funcionamento otimizado. Para o desenvolvimento de um modelo matemático, deve-se ter por premissa as características dominantes do processo que se pretende controlar, uma vez que um sistema físico pode ter diferentes modelos a depender das características priorizadas e os diferentes alcances operacionais. Por exemplo, um carro pode ser modelado como uma partícula que realiza determinada trajetória ou como um corpo que possui elementos que geram ou dispersam energia. É interessante para o presente trabalho, obter modelos que atendam à finalidade de controle. Nesse sentido, a adequada modelagem da dinâmica dominante é fundamental. A dinâmica dominante refere-se a dinâmica mais lenta do processo ou é representada pelos componentes instáveis do sistema modelado. Definida as dinâmicas dominantes com respeito à variável a ser controlada, são selecionadas e aplicadas uma série de leis da física para descrever o processo. Estas foram abordadas durante o curso de graduação em Engenharia Mecatrônica no CEFET-MG e podem ser encontradas em (ALEXANDER; SADIKU, 2013) para os sistemas elétricos, em (NORTON, 2010) para os mecânicos, em (SPONG; HUTCHINSON; VIDYASAGAR, 2020) para os robóticos e em (BORGNACKE; SONNTAG, 2018) para os com dinâmica dos fluidos e termodinâmicos. As modelagens dos sistemas dinâmicos costumam gerar equações diferenciais compatíveis ao processo da forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d_{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d_{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u. \quad (2.1)$$

em que u é o sinal de entrada e y o sinal de saída do sistema. É comum que os sistemas descritos em equações diferenciais apresentem não linearidades em seus modelos, tornando

a análise e o projeto dos controladores mais complexa. Costuma-se, então, linearizar a representação matemática para que o controle ocorra em torno de um ponto de operação. Usualmente, aplica-se a transformada de Laplace em (2.1) para linearizar o modelo e obter uma razão da saída sobre a entrada do sistema, em que são assumidas condições iniciais nulas, conforme

$$\begin{aligned} & Y(s)s^n + a_{n-1}Y(s)s^{n-1} + \dots + a_1Y(s)s + a_0Y(s) \\ &= U(s)s^m + b_{m-1}U(s)s^{m-1} + \dots + b_1U(s)s + b_0U(s) \\ \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Outro método utilizado é a representação em espaço de estados, na qual a equação diferencial de ordem elevada é reduzida a um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem. Para isso, são definidas variáveis de estado da forma,

$$\begin{aligned} x_1 &= y, & \dot{x}_1 &= \frac{dy}{dt}; \\ x_2 &= \frac{dy}{dt}, & \dot{x}_2 &= \frac{d^2y}{dt^2}; \\ x_{n-1} &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, & \dot{x}_{n-1} &= \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}; \\ x_n &= \frac{d^n y}{dt^n}, & \dot{x}_n &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Usando (2.3) é possível estabelecer n equações diferenciais,

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n = a_0x_1 + a_1x_2 \dots - a_nx_n + b_0u \quad (2.4)$$

as quais podem ser reescritas em termos matriciais,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (2.5)$$

Segundo Nise e Silva (2013), a saída do sistema na representação em espaço de estados é

obtida a partir de

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A generalização de (2.5) e (2.6) é representada por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.7)$$

que é uma realização da função de transferência (2.2). Ressalta-se que essa representação não é única, uma vez que há infinitas transformações de similaridade (operações de mudança de base) na forma $\bar{x} = Mx$, em que M é uma matriz não-singular (que possui inversa).

2.2.2 Sistemas submetidos à saturação

Sistemas lineares com entradas saturadas são aqueles que possuem limitação no sinal de controle. Segundo Tarbouriech et al. (2011), mesmo que o sistema em malha aberta seja considerado linear, a presença da saturação torna o processo em malha fechada não linear, gerando problemas no desempenho e podendo instabilizar a malha de controle do sistema. Dessa forma, esta seção abordará as influências da entrada saturada no comportamento da malha aberta, malha fechada, região de linearidade, região de atração e serão discutidas a estabilidade global e local e o lema da condição de setor.

Comportamento em malha aberta

No caso de sistemas representados em espaço de estados como em (2.7), o sinal saturado será o sinal de controle u . Ainda quanto ao sistema (2.7) tem-se as seguintes hipóteses:

Hipótese 1 *Os pares (A,B) e (C,A) são controláveis e observáveis, respectivamente.*

Hipótese 2 *O vetor u está contido em um conjunto compacto dado por $S(u, u_{\min}, u_{\max})$ definido por*

$$S(u, u_{\min}, u_{\max}) = \{u \in \mathbb{R}^m : -u_{\min} \preceq u \preceq u_{\max}\} \quad (2.8)$$

em que \preceq indica uma inequação de elemento a elemento e u_{\min} e u_{\max} são vetores positivos, isto é, $u_{\min(i)} > 0$, $u_{\max(i)} > 0$, $\forall i = 1 \dots m$.

Sendo o sinal de controle restringido, ou seja, pertencente a $S(u, u_{\min}, u_{\max})$, tem-se uma generalização do conceito clássico de controlabilidade, levando a uma nova

definição para os estados que podem ser direcionados para a origem.

Definição 1 *Um estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é dito nulo controlável se existe um período T e um sinal de controle admissível $u(t) \in S(i_m, u_{\min}, u_{\max})$, tal que para $x(0) = x_0$ e portanto, $x(T) = 0$. O conjunto de todos os estados nulos controláveis são chamados de região de controlabilidade nula do sistema. Se a região de controlabilidade nula é todo o espaço de estados, o sistema é dito nulo controlável com entradas limitadas (TARBOURIECH et al., 2011).*

A Hipótese 2 representa as restrições em amplitude do sinal de controle, que são relacionadas aos limites físicos ou de segurança impostos pelos atuadores. Essas restrições, embora pareçam simples, podem induzir comportamentos não desejáveis na malha fechada.

Comportamento em malha fechada

Os controladores são utilizados para melhorar a resposta dinâmica de um sistema e alcançar as características de saída objetivadas. Tendo como entrada a saída medida da planta (y), o controlador fornece um sinal v de saída para o atuador que o transforma em outra forma de energia para estimular a planta. Normalmente, o atuador apresenta uma dinâmica muito mais rápida que a do sistema e, por isso, é modelado apenas por uma relação estática. Portanto, na ausência de restrições na magnitude do sinal de controle

$$u(t) = v(t) \quad (2.9)$$

No entanto, devido aos limites impostos pelas limitações físicas do atuador ou por questões de segurança dados pela hipótese 2, o sinal de controle é descrito por uma função de saturação,

$$u(t) = \text{sat}(v(t)) \quad (2.10)$$

em que $\text{sat}(\cdot)$ é definida por

$$\text{sat}(v(i)) = \begin{cases} u_{\max(i)} & \text{se } v(i) > u_{\max(i)} \\ v(i) & \text{se } -u_{\min(i)} \leq v(i) \leq u_{\max(i)} \\ -u_{\min(i)} & \text{se } v(i) < -u_{\min(i)} \end{cases} \quad (2.11)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$.

A função de saturação e o sistema de malha fechada são, respectivamente, representados nas Figuras 2.1(a) e 2.1(b).

Uma das leis de controle de saturação usual é a realimentação de estados, na qual se supõe que os estados estejam disponíveis para realimentação, por meio de

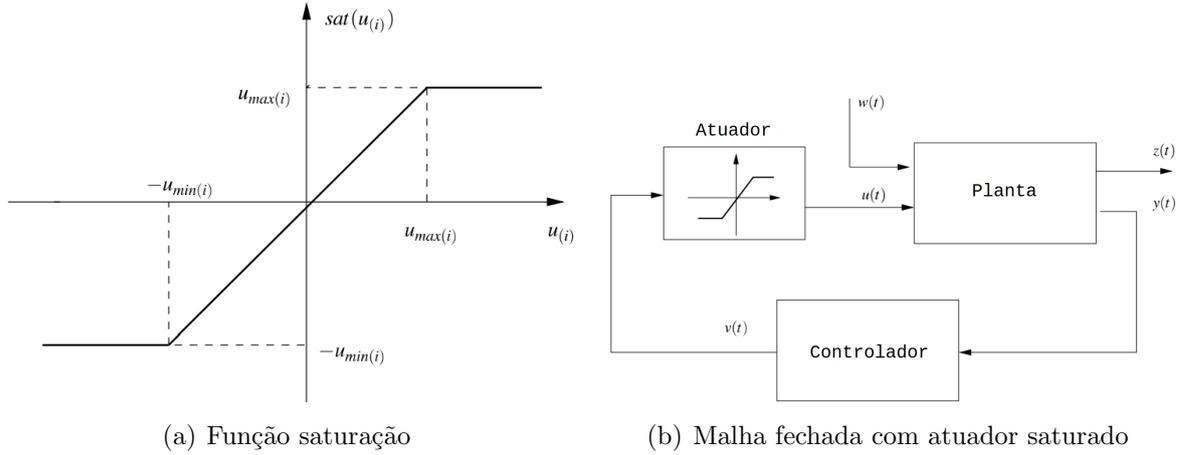


Figura 2.1: Função saturação e sistema em malha fechada com entrada saturada. (TARBOURIECH et al., 2011)

medição ou, mais frequentemente, por meio do uso de observadores. Portanto, o sinal do controlador é

$$v(t) = Kx(t) \quad (2.12)$$

para $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

A lei de controle efetiva leva em consideração $\text{sat}(\cdot)$ e portanto é

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t)) \quad (2.13)$$

que levada em (2.11) resulta em

$$\text{sat}(K_i x(t)) = \begin{cases} u_{\max(i)} & \text{se } K_i x(t) > u_{\max(i)} \\ K_i x(t) & \text{se } -u_{\min(i)} \leq K_i x(t) \leq u_{\max(i)}, \quad i = 1, \dots, m \\ -u_{\min(i)} & \text{se } K_i x(t) < -u_{\min(i)} \end{cases} \quad (2.14)$$

Resultando na dinâmica de malha fechada descrita por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\text{sat}(Kx(t)) \quad (2.15)$$

Região de linearidade

Considere a função (2.14) e a malha fechada (2.15). Para os estados suficientemente próximos da origem do sistema ($x = 0$), tem-se que

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t)) = Kx(t) = v(t). \quad (2.16)$$

Neste caso, diz-se que a saturação não está ativa ou que o sinal de controle não está saturado. Derivando o estado,

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (2.17)$$

Dessa forma, defini-se

Definição 2 *A região de linearidade do sistema (2.15), denominada R_L , é definida como o conjunto em que todos os estados $x \in \mathbb{R}^n$ cujos valores de $\text{sat}(Kx) = Kx$ (TARBOURIECH et al., 2011).*

Para simplificar, suponha que K tenha posto linha completo ($\text{rank}(K) = m$). A partir da definição da função de saturação, a região de linearidade pode ser definida como a interseção de dois semi-planos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i^{\max} &= \{x \in \mathbb{R}^n; K_{(i)}x \leq u_{\max(i)}, \quad i = 1, \dots, m\} \\ \mathcal{H}_i^{\min} &= \{x \in \mathbb{R}^n; K_{(i)}x \geq -u_{\min(i)}, \quad i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Gerando o seguinte conjunto,

$$R_L = S(Kx, u_{\min}, u_{\max}) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{\min} \preceq Kx(t) \preceq u_{\max}\} \quad (2.18)$$

que possui as características:

- É simétrico se $u_{\min(i)} = u_{\max(i)}$, $\forall i = 1, \dots, m$ e assimétrico caso contrário;
- É limitado quando $\text{rank}(K) = n$ e não limitado quando $\text{rank}(K) < n$.

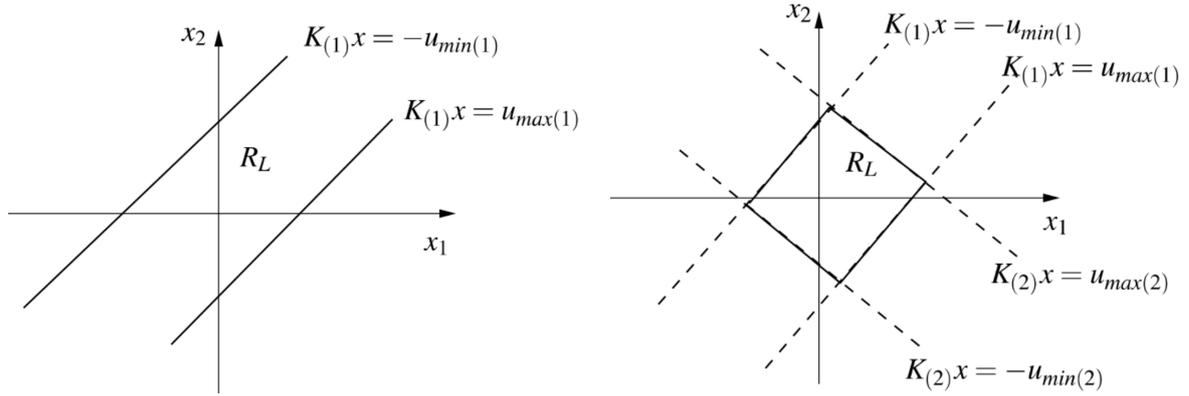
Os casos citados podem ser visualizados geometricamente na Figura 2.2 para um sistema de segunda ordem.

Ressalta-se que quando $(A + BK)$ é assintoticamente estável, é sempre possível calcular conjuntos invariantes de regiões de linearidade, conforme o seguinte Teorema.

Teorema 1 *Segundo Tarbouriech et al. (2011), Dada uma matriz K tal que $A + BK$ é assintoticamente estável, então sempre existe um conjunto, denotado S_L , para o qual as seguintes propriedades são válidas:*

- $S_L \subseteq S(Kx, u_{\min}, u_{\max})$;
- $\forall x(0) \in S_L$, $x(t, x(0))$ é uma trajetória linear do sistema;
- $\forall x(0) \in S_L$, $x(t, x(0)) \in S_L$ e $x(t, x(0)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Ressalta-se que o Teorema 1 não fornece qualquer garantia sobre as trajetórias do sistema saturado inicializado fora de S_L . Essa região caracteriza a abordagem do tipo *saturation*



(a) Sem limitação $R_L(m = 1, n = 2, \text{rank}(K) = 1)$; (b) Limitado $R_L(m = n = 2, \text{rank}(K) = 2)$;

Figura 2.2: Regiões de linearidade para um sistema de segunda ordem em duas situações distintas: (a) posto de K unitário e (b) posto de K igual a 2. (TARBOURIECH et al., 2011)

avoidance, que é menos eficiente na medida em que: a energia entregue ao sistema é menor e a região pode, por isso mesmo, ficar muito pequena.

Região de atração

A região de atração do sistema em malha fechada é definida como segue.

Definição 3 A região de atração R_A , também chamada de região de estabilidade assintótica (RAS) ou simplesmente região de estabilidade da origem do sistema é definida como o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ do espaço de estados para o qual $x(0) = x$ leva a trajetória $x(t, x(0))$ à convergência assintótica. Isso implica que, se $x(0) \in R_A$, então $x(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ (TARBOURIECH et al., 2011).

Neste caso, são incluídos estados iniciais que estão fora de R_L , mas cujas trajetórias, mesmo gerando sinais de controle que saturam, convergem para a origem. O cálculo para caracterização geométrica exata da região de atração não é uma tarefa fácil. Portanto, são determinados subconjuntos da região de atração com uma representação analítica bem definida, como conjuntos elipsoidais e poliédricos.

Definição 4 A região R_S é dita estimativa da região de estabilidade assintótica (RAS) para o sistema se $R_S \subset R_A$ e $0 \in R_S$ (TARBOURIECH et al., 2011).

Assim, se a condição inicial for tomada em uma região de estabilidade, a convergência da trajetória para a origem é garantida.

2.2.3 Estabilidade de sistemas

Apenas sob algumas condições particulares de estabilidade em malha aberta e lei de controle é possível garantir a estabilidade global do sistema em malha fechada saturado. Para o caso de estabilidade global, a região de atração da origem engloba todo o espaço de estados. Contudo, a determinação exata da região de atração da origem é uma questão muito desafiadora. A ideia é, portanto, obter aproximações internas convexas da região de atração, ou seja, obter regiões de estabilidade assintótica. Na prática, procura-se uma RAS que seja analiticamente bem caracterizada e que possa ser “maximizada” considerando alguns critérios geométricos específicos. Este é o caso das regiões elipsoidal e poliédrica, que podem ser associadas às funções de Lyapunov quadráticas e poliédricas. Dessa forma, as regiões de estabilidade podem, em geral, ser consideradas como conjuntos de níveis de Lyapunov.

Dois tipos principais de funções de Lyapunov têm sido usados para fornecer estimativas de RA para sistemas que apresentam saturação de entrada:

- Funções de Lyapunov quadráticas levando a regiões elipsoidais de estabilidade;
- Funções de Lyapunov poliédricas levando a regiões poliédricas de estabilidade.

Funções de Lyapunov mais complexas também podem ser usadas como, por exemplo, funções quadráticas por partes e função de Lure.

Teoria de Lyapunov

A região de estabilidade pode ser definida ao determinar uma RAS elipsoidal contida em R_L . Para isso é suficiente, para o caso linear, determinar uma matriz P que satisfaça a desigualdade de Lyapunov:

$$P(A + BK) + (A + BK)^\top P < 0. \quad (2.19)$$

A função de Lyapunov pode ser entendida como uma função de energia, que caso seja positiva e decrescente com relação ao tempo, as trajetórias do sistemas tenderão a origem, levando o sistema à região de estabilidade.

No caso da definição de uma RAS elipsoidal, todos os conjuntos de elipsoides $\varepsilon(P, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^\top P x \leq \eta^{-1}\}$ contidos em $S(Kx, u_{\min}, u_{\max})$ são conjuntos invariantes positivos e contrativos em relação ao sistema linear. O elipsoide máximo associado a P e incluído em $S(Kx, u_{\min}, u_{\max})$ pode ser determinado pelo seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \eta^{-1} = x^\top P x \\ \text{sujeito a} \quad & -u_{\min} \leq Kx \leq u_{\max} \end{aligned}$$

Já no caso não linear, que é onde está enquadrada a saturação de atuadores, o método de Lyapunov objetiva o estudo do comportamento de soluções (ou trajetórias) em uma vizinhança em torno de um ponto de equilíbrio, sem ser necessário conhecer explicitamente essas trajetórias. Este método é baseado na utilização de algumas funções auxiliares com propriedades como a positividade e permite concluir sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio, mas estudando a evolução de tais funções ao longo das trajetórias do sistema considerado.

Seja $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável definida em um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ que contém a origem. A derivada no tempo de V ao longo das trajetórias de um sistema do tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0 \quad (2.20)$$

é denotada $\dot{V}(x)$ e definida por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^{(i)}} \dot{x}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x^{(i)}} f^{(i)}(x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x^{(1)}} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x^{(n)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{(1)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Observa-se que a derivada de V ao longo das trajetórias de um sistema é dependente da equação desse sistema.

Com relação ao sistema (2.20), o teorema a seguir fornece condições que permitem concluir sobre a estabilidade da origem.

Teorema 2 *Seja $x_e = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema (2.20). Seja $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua diferenciável em uma vizinhança \mathcal{D} em torno de $x = 0$, tal que*

1. $V(0) = 0$ e $V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{D}, x \neq 0$.

2. $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Então, $x_e = 0$ é estável. No entanto, se

3. $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in \mathcal{D}, x \neq 0$.

Então $x_e = 0$ é assintoticamente estável (TARBOURIECH et al., 2011).

Esse Teorema garante a estabilidade local, uma vez que a estabilidade só é garantida em uma vizinhança ao redor da origem. A principal vantagem desse Teorema e o uso da função Lyapunov reside no fato de que é possível aplicá-los sem resolver a equação diferencial (2.20). Caso sejam aplicados em uma certa vizinhança da origem, é interessante estudar

sob quais condições a estabilidade do sistema (2.20) é obtida para qualquer condição inicial $x(t_0) = x(0) \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, o sistema (2.20) é dito globalmente estável. A ideia é usar o Teorema considerando $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. Mesmo assim, isso não é suficiente para obter a estabilidade global, para isso segue

Teorema 3 *Seja $x_e = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema (2.20). Seja $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua diferenciável tal que:*

1. $V(0) = 0$ e $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.
2. $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$.
3. $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Então $x_e = 0$ é globalmente, assintoticamente estável (TARBOURIECH et al., 2011).

É importante ressaltar que os dois Teoremas prévios proveem uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (2.20). Então, o fato de uma candidata função Lyapunov não satisfazer as condições desses Teoremas não significa que o ponto de equilíbrio analisado não é assintoticamente estável. Apenas significa que a propriedade de estabilidade não pode ser provida usando a função Lyapunov. Portanto, a principal dificuldade em aplicar esses Teoremas reside na escolha da “boa” função Lyapunov. Infelizmente, não existe um método que permita escolher a priori tal função. Em geral, a escolha dessa função requer experiência do projetista.

Desigualdade Linear Matricial - LMI

Segundo Duan e Yu (2013), as desigualdades lineares matriciais são inequações matriciais cujas variáveis matriciais são lineares. Sua forma geral é dada por

$$F(P) = A^\top P + PA + Q < 0 \quad (2.22)$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$,

$$Q \in \mathbb{S}^m = \{M | M^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}\} \quad (2.23)$$

são matrizes conhecidas, e $P \in \mathbb{S}^m$ é a matriz desconhecida. Aqui, “<” representa definição simétrica negativa. Seja $Q \in \mathbb{S}^n$, $D, E_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, 2, \dots, l$, então verifica-se que,

$$L(X) = D^\top X + X^\top D + \sum_{i=1}^l (E_{T_i} X F_i + F_i^\top X^\top E_i) + Q \quad (2.24)$$

é linear na matriz $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Como a matriz $L(X)$ é simétrica, pode-se definir a desigualdade

$$L(X) < 0, \quad (2.25)$$

o que é válido no sentido de que a matriz $L(X)$ é definida negativa simétrica. Essa desigualdade é uma desigualdade de matriz linear na matriz de parâmetros $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Além disso, (2.25) é chamada de forma geral de LMIs.

A desigualdade matricial de Lyapunov em tempo discreto é uma forma especial de LMIs, sendo igual a

$$A^\top P A - P + Q < 0 \quad (2.26)$$

2.2.4 Modelagem por não-linearidade de setor

Dentre as abordagens de representação do sistema em malha fechada saturado, tem-se a modelagem por não-linearidade de setor. Neste caso, considera-se que o termo de saturação é uma não-linearidade descentralizada sem memória que satisfaz uma condição de setor. A expressão descentralizada significa, na prática, que cada atuador tem uma saturação independente. A função zona-morta atende os requisitos mencionados, portanto, a função saturação (2.14) é reescrita como uma não linearidade de zona-morta descentralizada, sem memória

$$\phi(v(t)) = \text{sat}(v(t)) - v(t) \quad (2.27)$$

que é equivalente a

$$\phi(v)_{(i)} = \begin{cases} u_{\max(i)} - v_{(i)} & \text{se } v_{(i)} > u_{\max(i)} \\ 0 & \text{se } -u_{\min(i)} \leq v_{(i)} \leq u_{\max(i)} \\ u_{\min(i)} - v_{(i)} & \text{se } v_{(i)} < -u_{\min(i)} \end{cases} \quad (2.28)$$

para $i = 1, \dots, m$. A função zona-morta $\phi(v(t))$, representada graficamente na Figura 2.3, permite que a análise de estabilidade do sistema possa ser visto como um problema de Lure. Este problema considera a estabilidade de uma malha fechada contendo um sistema linear assintótico estável e uma não linearidade descentralizada sem memória que satisfaz uma condição de setor (TARBOURIECH et al., 2011). A não linearidade $\phi(v(t))$ é necessária para satisfazer a condição de setor descrita na Definição a seguir.

Definição 5 Diz-se que uma não linearidade sem memória $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz uma condição de setor se

$$(\phi(t, y) - \Omega_{\min} y)' (\phi(t, y) - \Omega_{\max} y) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall y \in \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m \quad (2.29)$$

para $\phi(t, y)$ contínua por partes em t e localmente Lipchitz em y , matrizes reais Ω_{\max} e Ω_{\min} em que $\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$ é uma matriz simétrica definida positiva e o conjunto \mathcal{S} contém a origem em seu interior. Se $\mathcal{S} = \mathbb{R}^m$, então $\phi(\cdot, \cdot)$ satisfaz globalmente a

condição de setor. Se $\phi(t,y)$ satisfizer (2.29), então $\phi(t,y)$ pertence ao setor $(\Omega_{min}, \Omega_{max})$ (TARBOURIECH et al., 2011).

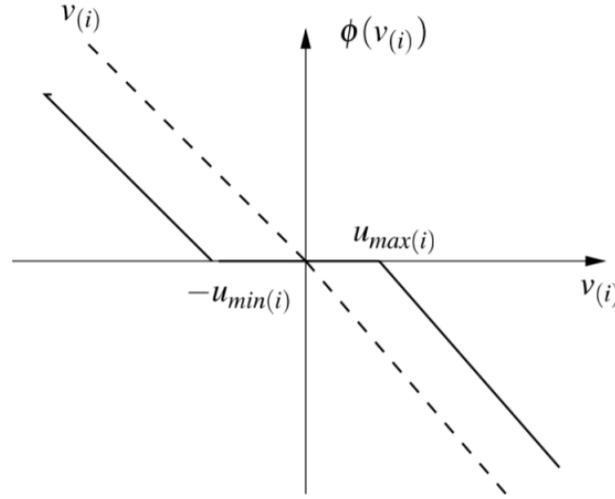


Figura 2.3: Representação gráfica da função zona morta $\phi(v(i))$. (TARBOURIECH et al., 2011)

Para o sistema em malha fechada saturado,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) &= \Psi(v(t)) \\ v(t) &= Kx(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

com a não-linearidade $\Psi(v(t)) = \text{sat}(v(t))$, em que a saturação é representada pela não linearidade $\phi(v(t))$, a malha fechada é retratada como,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + BK)x(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{u}(t) &= \phi(v(t)) \\ v(t) &= Kx(t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Se $v(t) = Kx(t)$ for uma lei de controle estabilizante, o sistema (2.31) é assintoticamente estável e a matriz $(A+BK)$ é Hurwitz. Se $\phi(v(i))$ satisfizer a condição de setor apresentada na Definição 5 e se for considerado um escalar $\lambda(i) > 0$, duas situações surgem, estas estão representadas graficamente na Figura 2.4 e são descritas como

1. Se $\lambda(i) = 1$, segue que

- para $v(i) \geq 0$: $\phi(v(i)) \leq 0$ e $\phi(v(i)) \geq -\lambda(i)v(i)$
- para $v(i) \leq 0$: $\phi(v(i)) \geq 0$ e $\phi(v(i)) \leq -\lambda(i)v(i)$

equivalentemente, diz-se que a não linearidade $\phi(v(i))$ pertence globalmente ao setor $\text{sec}[0, -1]$.

2. Se $\lambda_{(i)} \leq 1$, segue que

- para $0 \leq v_{(i)} \leq \frac{u_{max(i)}}{1-\lambda_{(i)}} : \phi(v_{(i)}) \leq 0$ e $\phi(v_{(i)}) \geq -\lambda_{(i)}v_{(i)}$
- para $\frac{-u_{min(i)}}{1-\lambda_{(i)}} \leq v_{(i)} \leq 0 : \phi(v_{(i)}) \geq 0$ e $\phi(v_{(i)}) \leq -\lambda_{(i)}v_{(i)}$

em outros termos, a não-linearidade $\phi(v_{(i)})$ pertence localmente ao setor $\text{sec}[0, -\lambda_{(i)}]$, ou seja, pertence a este setor desde que

$$-u_{min(i)}^\lambda = \frac{-u_{min(i)}}{1-\lambda_{(i)}} \leq v_{(i)} \leq \frac{u_{max(i)}}{1-\lambda_{(i)}} = u_{max(i)}^\lambda$$

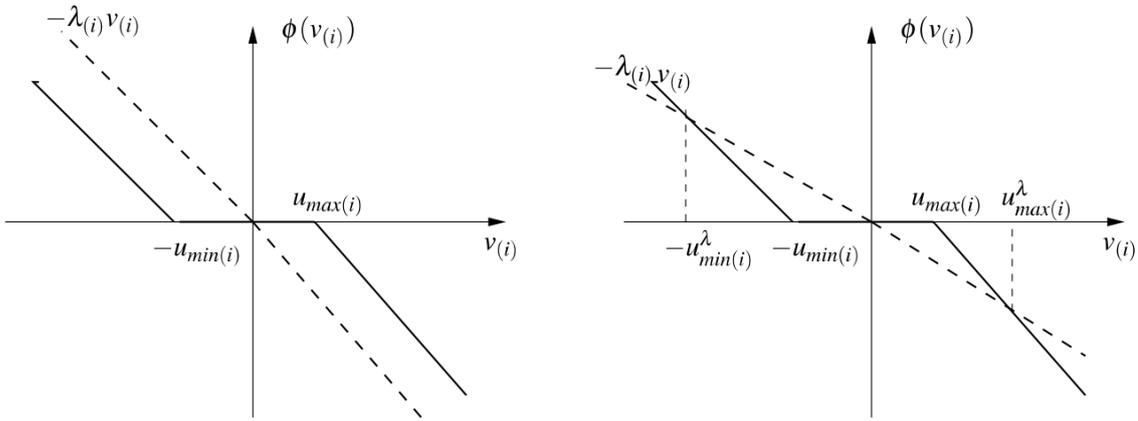


Figura 2.4: Não-linearidade de zona-morta: (a) no setor global; (b) no setor local. (TARBOURIECH et al., 2011)

Condição de setor generalizada

As condições de setores são usadas para derivar condições de estabilidade e estabilização do sistema. A condição de setor generalizada se aplica especificamente a não linearidades de zona-morta, seu uso resulta em condições menos conservadoras do que o uso de condições de setor clássicas, que por sua vez, são válidas para qualquer não linearidade descentralizada com valor vetorial. A seguir, é apresentada a condição de setor generalizada, que será usada posteriormente neste trabalho.

Seja o conjunto

$$S(v-w, u_{min}, u_{max}) = \{v \in \mathbb{R}^m; w \in \mathbb{R}^m; -u_{min} \preceq v-w \preceq u_{max}\} \quad (2.32)$$

Lema 1 Se v e w são elementos de $S(v-w, u_{min}, u_{max})$, então a não linearidade $\phi(v)$ satisfaz a seguinte inequação:

$$\phi(v)^\top T(\phi(v) + w) \leq 0 \quad (2.33)$$

para qualquer matriz definida positiva diagonal $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (SILVA JUNIOR; TARBOURIECH, 2005).

Considerando a lei de controle $v(t) = Kx(t)$ e aplicando o Lema 1 tem-se

$$\phi(Kx)^\top T(\phi(Kx) + Gx) \leq 0 \quad (2.34)$$

em que a matriz G é uma variável que adiciona um grau de liberdade ao sistema. O conjunto para o estado x obtido com (2.34) é

$$S((K - G)_x, u_{\min}, u_{\max}) = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_{\min} \preceq (K - G)x \preceq u_{\max}\} \quad (2.35)$$

O lema definido e a condição de setor (2.34) permitem que a saturação possa se enquadrar em uma classe de problemas solucionados por LMIs.

Estabilidade e Estabilização de Sistemas sob Saturação

3.1 Representação Implícita Afim por Partes

Existem várias representações para sistemas afins por partes. No entanto, graças a uma descrição matemática intuitiva, a representação explícita tem sido amplamente utilizada para análises de estabilidade. Os métodos de análise de estabilidade de sistemas afins por partes (PWA - *Piecewise Affine*) usando a representação explícita geralmente requerem a enumeração da partição, bem como a enumeração de possíveis transições entre as partições. Em alguns casos, a enumeração dessas transições pode ser difícil ou impossível, como quando a transição é conduzida por um sinal externo ou sempre que há uma incerteza na partição. Por isso, foi proposto por Groff (2020) uma representação para funções PWA contínuas que não requerem que as regiões e partições sejam enumeradas para realizar a análise de estabilidade com funções de Lyapunov do PWA.

Nesta seção será descrito o estudo feito a respeito da representação proposta por Groff (2020) e sobre a verificação de estabilidade dos sistemas descritos na representação implícita PWA. Essa representação é baseada em uma função de rampa e codifica implicitamente a partição do sistema, portanto, não requer que as regiões e transições sejam enumeradas. A representação é composta por duas equações, uma das quais pode apresentar um *loop* algébrico. Já as condições para análise da estabilidade exponencial da origem de sistemas PWA utilizam funções candidatas de Lyapunov quadráticas por partes, essas dependem do estado do sistema e das funções de rampa que descrevem as funções PWA. Com isso consegue-se gerar desigualdades matriciais lineares que podem ser resolvidas usando otimização. Com base nessas desigualdades desenvolveu-se um código que implementa a minimização dessas funções e retorna a factibilidade do sistema.

3.1.1 Funções PWA Contínuas Implícitas

A representação padrão para funções PWA contínuas é definida por $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$

$$f(x) = A_i x + b_i \forall x \in \Gamma_i \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n_s \quad (3.1)$$

em que os conjuntos Γ_i definem uma partição de \mathbb{R}^n , isto é, $\cup_{i=1}^{n_s} \Gamma_i = \mathbb{R}^n$.

Já a representação implícita proposta por Groff (2020) é definida por $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$

$$f(x) = F_1 x + F_2 \phi(y(x)) \quad (3.2)$$

$$y(x) = F_3 x + F_4 \phi(y(x)) + f_5 \quad (3.3)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $F_1 \in \mathbb{R}^{n_f \times n}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$, $F_3 \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $F_4 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $f_5 \in \mathbb{R}^{n_y}$ e a função vetorial $\phi : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ é definida pela função de rampa como

$$\phi_i(y) = r(y_i) := \begin{cases} 0 & \text{if } y_i < 0 \\ y & \text{if } y_i \geq 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n_y \quad (3.4)$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 3.1.

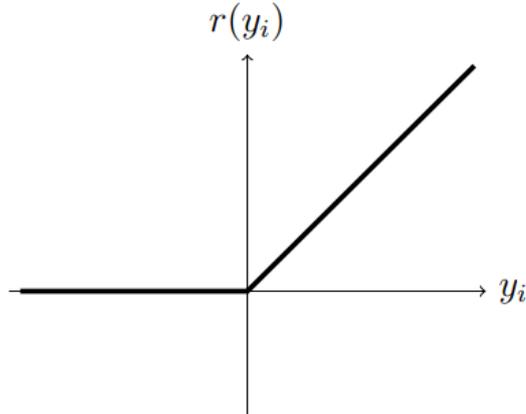


Figura 3.1: Função de rampa $r(y_i)$ não linear (GROFF, 2020)

Da definição da função rampa (3.4) tem-se

$$\phi(y) = \Delta(y)y \quad (3.5)$$

em que $\Delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{D}_{\{0,1\}}$. Gerando

$$\Delta_{ii} := \begin{cases} 0 & \text{if } y_i < 0 \\ 1 & \text{if } y_i \geq 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n_y. \quad (3.6)$$

A equação (3.3) é implícita para a variável y , isto é, para se obter y para um certo x , é preciso resolver

$$y - F_4\phi(y) = F_3x + f_5. \quad (3.7)$$

Assumindo que (3.7) é bem condicionado, ou seja, que cada x corresponde a um único y , defini-se assim um mapa $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. A partir de (3.5)-(3.7) tem-se que $y(x)$ satisfaz

$$y(x) = (I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}F_3x + (I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}f_5. \quad (3.8)$$

A matriz $(I - F_4\Delta(y(x)))$ tem inverna desde que a equação implícita seja bem condicionada, como suposto. Usando (3.2), (3.5) e (3.8) obtém-se

$$f(x) = (F_1 + F_2\Delta(y(x))(I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}F_3)x + F_2\Delta(y(x))(I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}f_5 \quad (3.9)$$

Então (3.8) e (3.9) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x)x + b(x) \\ y(x) &= C(x)x + d(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que

$$\begin{aligned} A(x) &= (F_1 + F_2\Delta(y(x))(I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}F_3 \\ b(x) &= F_2\Delta(y(x))(I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}f_5 \\ C(x) &= (I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}F_3 \\ d(x) &= (I - F_4\Delta(y(x)))^{-1}f_5 \end{aligned}$$

$A(x)$, $b(x)$, $C(x)$ e $d(x)$ são assim determinados por $\Delta(y(x))$ como em (3.9) que, por sua vez, dependem do sinal da solução y . Uma vez que os elementos diagonais de $\Delta(y(x))$ pertencem a $\{0,1\}$, $\Delta(y(x))$ tem no máximo 2^m de valores possíveis. Assim, $A(x)$, $b(x)$, $C(x)$ e $d(x)$ podem ter no máximo 2^m valores. Ainda, usa-se (3.10) para obter a representação explícita, que é da forma

$$f(x) = A_i x + b_i x \in \Gamma_i$$

$i \in \{1, \dots, 2^m\}$, $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^n | y_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{J}_i, y_j < 0, \forall j \notin \mathcal{J}_i, i = 1 + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} 2^{j-1}\}$, em que \mathcal{J}_i é um conjunto que contém os índices dos elementos de y que não são negativos na região Γ_i .

Portanto, de (3.2) - (3.4), a função vetorial $\phi(y(x))$ e as regiões onde seus argumentos não são negativos que definem a partição PWA de \mathbb{R}^n . Desde que essas

partições e o valor sejam definidos implicitamente, (3.2) - (3.4) é referida como uma representação implícita dos sistemas PWA. Ainda, Usando (3.2) - (3.4) como um modelo para funções PWA contínuas evita-se a definição explícita de partições e das funções afins correspondentes, como na representação padrão (3.1).

Ressalta-se que graças ao bom condicionamento e a continuidade de ϕ , $f(x)$ é contínua. Ainda, observa-se que se $F_4 = 0$ ou para algumas estruturas particulares de F_4 , soluções explícitas para (3.10) podem ser obtidas. No caso de $F_4 = 0$, y é obtido por $y = F_3x + f_5$ possibilitando o fácil cálculo de $f(x)$ usando o valor de y . Ainda, (3.3) pode ser usado como um modelo para sistemas PWA de tempo discreto.

Será ilustrado a seguir, a representação (3.2) - (3.4) em um exemplo.

Exemplo: Dada uma matriz $K \in \mathbb{R}^{n_f \times n}$ e vetores $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{n_f}$ e $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^{n_f}$, e considerando a função assimétrica de saturação $f(x) = \text{sat}_{[\underline{\mu}, \bar{\mu}]}(Kx) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_f}$, definida como

$$f_i(x) = \begin{cases} \underline{\mu}_i, & x \in D_{1,i} = \{x \in \mathbb{R}^n | (Kx)_i \leq \underline{\mu}_i\} \\ K_i x, & x \in D_{2,i} = \{x \in \mathbb{R}^n | \underline{\mu}_i < (Kx)_i < \bar{\mu}_i\}, \quad i = 1, \dots, n_f. \\ \bar{\mu}_i, & x \in D_{3,i} = \{x \in \mathbb{R}^n | (Kx)_i \geq \bar{\mu}_i\} \end{cases}$$

Para obter uma representação implícita, é considerado que

$$\begin{aligned} y_j &= -K_j x + \underline{\mu}_j, \quad j = 1, \dots, n_f \\ y_j &= K_j x - \bar{\mu}_{j-n_f}, \quad j = n_f + 1, \dots, 2n_f. \end{aligned}$$

Portanto,

- Se $x \in D_{1,i}$, segue que $y_i \geq 0$ e $y_{i+n_f} < 0$, assim

$$\begin{aligned} \phi_i &= -K_i x + \underline{\mu}_i \\ \phi_{i+n_f} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{e } f_i = K_i x + \phi_i - \phi_{i+n_f} = \underline{\mu}_i.$$

- Se $x \in D_{2,i}$, segue que $y_i < 0$ e $y_{i+n_f} < 0$, assim

$$\begin{aligned} \phi_i &= 0 \\ \phi_{i+n_f} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{e } f_i = K_i x + \phi_i - \phi_{i+n_f} = K_i x.$$

- Se $x \in D_{3,i}$, segue que $y_i < 0$ e $y_{i+n_f} \geq 0$, assim

$$\begin{aligned}\phi_i &= 0 \\ \phi_{i+n_f} &= K_1 x - \bar{\mu}_i,\end{aligned}$$

$$\text{e } f_i = K_i x + \phi_i - \phi_{i+n_f} = \bar{\mu}_i.$$

Esta função pode ser descrita na representação implícita afim por partes considerando

$$\begin{aligned}F_1 &= K, & F_2 &= [I_{n_f}, -I_{n_f}] \\ F_3 &= \begin{bmatrix} -K \\ K \end{bmatrix}, & F_4 &= 0_{n_y \times n_y}, & f_5 &= \begin{bmatrix} \underline{\mu} \\ -\bar{\mu} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.11)$$

com $n_y = 2n_f$. Isso corresponde a uma partição com $3n_f$ regiões. Para $n = 2$, $n_f = 1$, $K = [-1 \ 1]$, $\underline{\mu} = -1$ e $\bar{\mu} = 2$ é obtido a seguinte partição de \mathbb{R}^2 em termos de y

$$\begin{aligned}\Gamma_3 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid y_1(x) < 0, y_2(x) \geq 0\} \\ \Gamma_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid y_1(x) < 0, y_2(x) < 0\} \\ \Gamma_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid y_1(x) \geq 0, y_2(x) < 0\},\end{aligned}$$

que é ilustrada na Figura 3.2. Nota-se que a região $y_1(x) > 0$ e $y_2(x) > 0$ é vazia, isso porque o sinal não pode estar simultaneamente acima do limite superior de saturação e abaixo do inferior. Uma representação explícita para $f(x)$ como neste caso é dada por

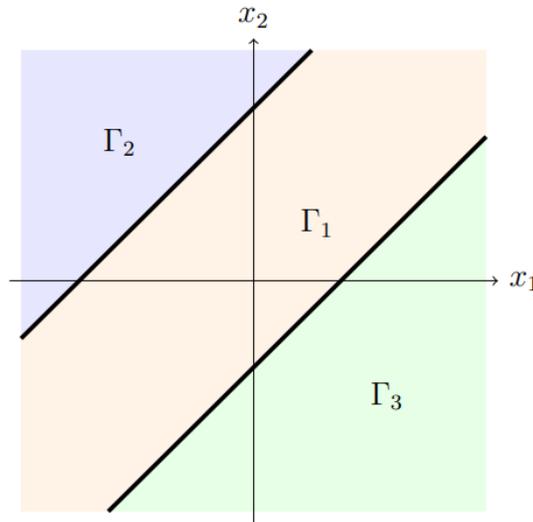


Figura 3.2: Partição de \mathbb{R}^2 para $f(x)$ definida em (3.11) (GROFF, 2020)

3.1.2 Condições de estabilidade para sistemas implícitos afim por partes de tempo discreto

As condições para análise da estabilidade exponencial da origem de sistemas PWA proposta por Groff (2020) utiliza funções candidatas de Lyapunov quadráticas por partes, que dependem de x e das funções de rampa que descrevem as funções PWA. Para verificar as condições de estabilidade, Groff (2020) propôs desigualdades matriciais lineares que podem ser resolvidas usando programação.

Propriedades de Setor de Funções de Rampa

A principal característica da representação implícita PWA que é explorada na formulação das condições de estabilidade é a caracterização da função de rampa em termos de identidades e desigualdades. Em particular, a função de rampa é uma não linearidade que se encontra no setor $[0, 1]$. Poderia se considerar uma relação ligada ao setor para formular condições de estabilidade para um sistema que apresenta tal não linearidade. Porém, visando diminuir o conservadorismo, procurou-se utilizar uma descrição mais precisa do que a desigualdade do setor. Uma vez que esta cobre uma ampla classe de não linearidades que se encontram no setor considerado, implicando em condições que certificam implicitamente a estabilidade não apenas para o sistema particular de interesse, mas para uma grande classe de sistemas, levando ao conservadorismo. Assim, será apresentado a seguir a obtenção de uma caracterização mais precisa da função de rampa (3.4), uma não linearidade limitada de um setor particular, usando algumas identidades e desigualdades.

Lema 2 *A função rampa $r(\theta)$ satisfaz a relação*

$$(r(\theta) - \theta)r(\theta) = 0 \quad (3.12)$$

$$r(\theta) \geq 0 \quad (3.13)$$

$$(r(\theta) - \theta) \geq 0 \quad (3.14)$$

Prova. Para $\theta < 0$ tem-se $r(\theta) = 0$ e $(r(\theta) - \theta) = (0 - \theta) > 0$, e para $\theta \geq 0$ tem-se que $(r(\theta) - \theta) = 0$, as relações (3.12) e (3.14) asseguram para todo $\theta \in \mathbb{R}$. A desigualdade (3.13) vem diretamente da definição da função de rampa (GROFF, 2020).

Do Lema 2, as seguintes generalizações em relação à função ϕ podem ser declaradas

Lema 3 *Para qualquer matriz $T \in \mathbb{D}^{n_y}$ a função ϕ em (3.4) satisfaz a identidade*

$$s_1(T, y) := \phi^T(y)T(\phi(y) - y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^{n_y}. \quad (3.15)$$

Prova. Desde que os elementos de ϕ sejam funções rampa, tem-se

$$s_1(T, y) = \sum_{i=1}^{n_y} T_{i,i} r(y_i) (r(y_i) - y_i)$$

o qual, usando (3.12) gera (3.15) (GROFF, 2020).

Lema 4 *Para qualquer vetor $\zeta \in \mathbb{R}^{n_\zeta}$ e $\mathbb{R} \in \mathbb{R}^{n_\zeta \times n_y}$ a função ϕ em (3.4) satisfaz a identidade*

$$s_2(R, \zeta, y) := \zeta > R(y - (\phi(y) - \phi(-y))) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (3.16)$$

Prova. Nota-se que a função de rampa r satisfaz a identidade

$$\theta - (r(\theta) - r(-\theta)) = 0. \quad (3.17)$$

De fato, se $\theta < 0$, tem-se $r(\theta) = 0$ e $r(-\theta) = -\theta$. Então, para $\theta < 0$, $\theta - r(\theta) + r(-\theta) = \theta - 0 - \theta = 0$. Se $\theta > 0$, tem-se $r(\theta) = \theta$ e $r(-\theta) = 0$, então para $\theta > 0$, $\theta - r(\theta) + r(-\theta) = \theta - \theta + 0 = 0$. Desde que os elementos do vetor $y - (\phi(y) - \phi(-y))$ sejam dados por $y_i - (r(y_i) - r(-y_i))$ tem-se que o resultado segue (3.17) (GROFF, 2020).

Observação 1 *Considerando a classe de funções*

$$\rho(\Omega, \theta) = 1_\Omega(\theta)\theta \quad (3.18)$$

em que Ω pertence ao conjunto $\{\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} | \theta \in \mathcal{I}, -\theta \notin \mathcal{I}, \theta \neq 0\}$ e 1_Ω é a função indicadora de um conjunto $\Omega \in \mathbb{R}$, que é $1_\Omega(\theta) = 1$ se $\theta \in \Omega$ e $1_\Omega(\theta) = 0$ se $\theta \in \Omega^c$ com $\Omega^c = \mathbb{R} \setminus \Omega$. A função de rampa é obtida com $\Omega = [0, \infty)$, i.e. $r(\theta) = \rho([0, \infty), \theta)$ tem-se também $r(-\theta) = -\rho(\Omega^c, \theta) = \rho((-\infty, 0), \theta)$.

As identidades (3.12) e (3.17) também asseguram se r é realocado por qualquer outra função da classe (3.18). Na verdade, usando (3.18) tem-se $\rho(\Omega, \theta)(\rho(\Omega, \theta) - \theta) = 1_\Omega(\theta)\theta(1_\Omega(\theta)\theta - \theta) = 1_\Omega(\theta)\theta(1_{\Omega^c}(\theta)\theta) = 0$, generalizando (3.12) para a classe de funções $\rho(\Omega, \theta)$. Também tem-se $\theta - (\rho(\Omega, \theta) + \rho(\Omega^c, \theta)) = \theta - (1_\Omega(\theta)\theta + 1_{\Omega^c}(\theta)\theta) = \theta - (\theta) = 0$ que generaliza (3.17) para a classe de funções $\rho(\Omega, \theta)$.

Da observação acima, expressões como (3.12) - (3.17) são válidas para uma classe de funções não lineares que abrangem a função de rampa. Observa-se ainda que, seguindo (3.18) e a definição do conjunto contendo Ω , a única instância de Ω satisfazendo $\rho(\Omega, \theta) \geq 0 \forall \theta \in \mathbb{R}$ é $\Omega = [0, \infty)$. Desde que $r(\theta) = \rho([0, \infty), \theta)$, a função rampa é não linear somente na classe que satisfaz

$$r(\theta) \geq 0 \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Esta desigualdade é utilizada no Lema seguinte

Lema 5 Para qualquer matriz $M \in \mathbb{P}^{(1+2n_y) \times (1+2n_y)}$ a função de vetores ϕ em (3.4) satisfaz a desigualdade

$$s_3(M, y) := \begin{bmatrix} 1 \\ \phi(y) \\ \phi(-y) \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} 1 \\ \phi(y) \\ \phi(-y) \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n_y} \quad (3.20)$$

Prova. Tem-se

$$\begin{aligned} s_3(M, y) = & M_{11} + 2 \sum_{i=1}^{n_y} M_{1(1+i)} r(y_i) + M_{1(1+n_y+i)} r(-y_i) + \sum_{i=1}^{n_y} \sum_{j=1}^{n_y+1} (M_{(1+i)(1+j)} r(y_i) r(y_j) \\ & + 2M_{(1+n_y+i)(1+j)} r(y_i) r(-y_j) + M_{(1+n_y+i)(1+n_y+j)} r(-y_i) r(-y_j)) \end{aligned}$$

Uma vez que cada elemento da matriz M é não negativo e a função de rampa verifica (3.19), concluímos que cada termo na expressão acima não é negativo, portanto (3.20) é válida (GROFF, 2020).

Condições para positividade de formas quadráticas generalizadas

Os Lemas definidos na subseção anterior são utilizados para definir as condições de verificação da positividade das formas quadráticas generalizadas do tipo

$$h(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \phi(y(x)) \\ \phi(-y(x)) \end{bmatrix}^T H \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \phi(y(x)) \\ \phi(-y(x)) \end{bmatrix} = \mathcal{X}(x)^T H \mathcal{X}(x) \quad (3.21)$$

Proposição 1 De Groff (2020) segue que, dada uma forma quadrática generalizada da forma $h(x)$ como em (3.21), se existir matrizes $T_1 \in \mathbb{D}^{n_y}$, $T_2 \in \mathbb{D}^{n_y}$, $R \in \mathbb{R}^{1+n+2n_y \times n_y}$, $M \in \mathbb{P}^{(1+2n_y) \times (1+2n_y)}$ tal que

$$h(x) + s_1(T_1, y(x)) + s_1(T_2, -y(x)) + s_2(R, \mathcal{X}, y(x)) - s_3(M, y(x)) \geq 0 \quad (3.22)$$

então

$$h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.23)$$

Resolvendo a desigualdade (3.22) é possível definir condições para verificação

da não negatividade de uma forma quadrática generalizada da forma (3.21) e ainda torna possível a solução das desigualdades de Lyapunov relacionadas à estabilidade de sistemas quadráticos por partes. Além disso, se a matriz H tem uma dependência afim de variáveis desconhecidas, a desigualdade (3.22) pode ser escrita como uma LMI, gerando, portanto, restrições de um programa semi-definido que pode ser resolvido com o *software* de otimização Yalmip do MATLAB.

Formulação da LMI

A LMI correspondente a desigualdade (3.22), utilizada para verificar a positividade de uma forma quadrática generalizada é

$$H + \frac{1}{2}H_e \left(\begin{bmatrix} -M_{11} & 0 & -2M_{12} & -2M_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_1 f_5 & -T_1 F_3 & (T_1(I - F_4)) - M_{22} & -2M_{23} \\ T_2 f_5 & T_2 F_3 & T_2 F_4 & T_2 - M_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_5^T \\ F_3^T \\ F_4^T - I \\ I \end{bmatrix} R^T \right) \geq 0 \quad (3.24)$$

3.1.3 Análise de Estabilidade de Sistemas PWA com Funções Lyapunov PWQ

Nesta seção, os resultados para a verificação da não negatividade de formas quadráticas generalizadas apresentadas anteriormente serão aplicados na função PWA implícita de tempo discreto (3.3), a fim de estudar sua estabilidade.

Considerando o sistema discreto no tempo da forma

$$x^+ = f(x) \quad (3.25)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ é uma função PWA definida pelas matrizes F_i , $i = 1, \dots, 4$ e f_5 tal como em (3.3) e x^+ é o valor do estado no próximo instante de tempo. De (3.3) tem-se $y^+ = F_3 x^+ + F_4 \phi(y^+) + f_5$. Assume-se que $f(0) = 0$. De (3.2), $f(0) = 0$ implica que $\phi(y(0)) = 0$, e (3.3) conduz a $y(0) = f_5$. $\phi(y(0)) = 0$ implica $y_i(0) \geq 0$, tem-se que $f_{5i} \geq 0$, $i = 1, \dots, n_y$.

Groff (2020) propôs uma função de Lyapunov quadrática por partes contínua, dada por uma forma quadrática generalizada em x e a função $\phi(y(x))$. Portanto, diferentemente das abordagens comumente encontradas na literatura, a definição de uma forma quadrática explícita em x para cada conjunto da partição não é necessária. Mais especificamente, considerou-se as funções candidatas de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$, $V(0) = 0$

dada por

$$V(x) = \begin{bmatrix} x \\ \phi(y(x)) \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} x \\ \phi(y(x)) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

com $P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}$, $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ e $P_3 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$.

Será obtido a seguir um limite superior quadrático para $V(x)$ que será usado na prova de estabilidade exponencial de sistemas de tempo discreto. Primeiro calcula-se um limite superior para $\|\phi\|^2$. Define-se $\bar{y} := y - f_5$ e os substituem em (3.3), assim

$$\bar{y} = F_3x + F_4\phi(\bar{y} + f_5).$$

Para $f(0) = 0$, $f_{5i} \geq 0$ e $\phi(\bar{y} + f_5) = \Delta\bar{y}$ com $\Delta \in \mathcal{D} = \{\Delta \in \mathbb{D}^n | \Delta_{i,i} \in [0,1]\}$. Do bom condicionamento de Δ tem-se que $(I - F_4\Delta)$ tem inversa para todo $\Delta \in \mathcal{D}$, então

$$\bar{y} = (I - F_4\Delta)^{-1}F_3x$$

e

$$\phi(y) = \phi(\bar{y} + f_5) = \Delta\bar{y} = \Delta(I - F_4\Delta)^{-1}F_3x,$$

gerando

$$\|\phi(y(x))\| \leq \sigma \|x\|.$$

Com $\sigma = \max_{\Delta \in \mathbb{D}} \|\Delta(I - F_4\Delta)^{-1}F_3\|$. De (3.26) segue que

$$V(x) \leq \|P_1\| \|x\|^2 + 2\|P_2\| \|x\| \|\phi\| + \|P_3\| \|\phi\|^2 \leq (\|P_1\| + 2\sigma\|P_2\| + \sigma^2\|P_3\|) \|x\|^2$$

O teorema a seguir apresenta condições para a estabilidade exponencial global da origem de (3.25) usando (3.26) como uma candidata à função de Lyapunov.

Teorema 4 *Se existir matrizes $P \in \mathbb{S}^{(n+n_y) \times (n+n_y)}$, $T_1 \in \mathbb{D}^{n_y}$, $T_2 \in \mathbb{D}^{n_y}$, $R^{1+n+2n_y \times n_y}$, $M_1 \in \mathbb{P}^{(1+2n_y) \times (1+2n_y)}$ e um escalar positivo ϵ_1 tal que*

$$\begin{aligned} & (V(x) - \epsilon_1 x^T x) + s_1(T_1, \phi(y(x)), y(x)) + s_1(T_2, \phi(-y(x)), -y(x)) \\ & + s_2(R_1, \mathcal{X}, \phi(y(x)), y(x)) - s_3(M_1, \phi(y(x))) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

e matrizes $T_3 \in \mathbb{D}^{2n_y}$, $T_4 \in \mathbb{D}^{2n_y}$, $R_2 \in \mathbb{R}^{1+2n+4n_y \times 2n_y}$, $M_2 \in \mathbb{P}^{(1+4n_y) \times (1+4n_y)}$ e um escalar $\eta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} & -(V(x^+) - (1 - \eta)V(x) + s_1(T_3, \phi(\tilde{y}), \tilde{y}) + s_1(T_4, \phi(-\tilde{y}), -\tilde{y})) \\ & + s_2(R_2, \tilde{\mathcal{X}}, \phi(\tilde{y}), \tilde{y}) - s_3(M_2, \phi(\tilde{y})) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

com $\tilde{y} = [y^T \ y^{+T}]^T$ e $\tilde{\mathcal{X}} = [1 \ x^T \ \phi(\tilde{y})^T \ \phi(-\tilde{y})^T]$, então a origem de (3.25) é exponencialmente globalmente estável. (GROFF, 2020)

As relações (3.27) e (3.28) ainda podem ser escritas na forma quadrática genérica, onde as matrizes H correspondentes apresentam uma dependência afim com os elementos da matriz P . Assim, as condições garantir o cumprimento de (3.27) e (3.28) podem ser obtidos na forma de LMI's.

Formulação da LMI para (3.27)

Neste caso $h(x) = V(x) - \epsilon_1 x^T x$. Dada a definição de $V(x)$ em (3.26), a matriz H neste caso é dada diretamente por

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 - \epsilon_1 I & P_2 & 0 \\ 0 & P_2^T & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Formulação da LMI para (3.28)

Para obter a LMI (3.24) correspondente a (3.28), deve-se considerar o vetor expandido $\tilde{y} = [y^T \ y^{+T}]^T$ e $\tilde{\mathcal{X}} = [1 \ x^T \ \phi(\tilde{y})^T \ \phi(-\tilde{y})^T]^T$. Usando (3.25) e (3.3) segue que

$$\tilde{y} = \tilde{F}_3 x + \tilde{F}_4 \phi(\tilde{y}) + \tilde{f}_5$$

com

$$\tilde{F}_3 = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_3 F_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}_4 = \begin{bmatrix} F_4 & 0 \\ F_3 F_2 & F_4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_5 = \begin{bmatrix} f_5 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

De (3.25), (3.26) e (3.3) tem-se que

$$\tilde{h}(x) = V(x^+) - (1 - \eta)V(x) = \tilde{X}^T \tilde{H} \tilde{X}$$

com

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{1 \times (n+2n_y)} & 0_{1 \times 2n_y} \\ 0_{(n+2n_y) \times 1} & \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2^T & N_3 \end{bmatrix} & 0_{(n+2n_y) \times 2n_y} \\ 0_{2n_y \times 1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = F_1^T P_1 F_1 - (1 - \eta) P_1$$

$$N_2 = [F_1^T P_1 F_2 - (1 - \eta) P_2 \quad F_1^T P_2]$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} F_2^T P_1 F_2 - (1 - \eta) P_3 & F_2^T P_2^T \\ P_2^T F_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

Portanto, a LMI correspondente à desigualdade (3.24) assume a forma (3.28), com as matrizes H , F_3 , F_4 e f_5 sendo substituídas respectivamente pelas matrizes \tilde{H} , \tilde{F}_3 , \tilde{F}_4 e \tilde{f}_5 definidas acima.

3.2 Abordagem por Não-Linearidade Setorial

As próximas subseções apresentam as condições de setor que permitem analisar a estabilidade e estabilizar os sistemas mecatrônicos submetidos a atuadores saturados.

3.2.1 Estabilidade

Com base nas propriedades de não-linearidade de setor, serão derivadas condições que garantem a estabilidade local de um sistema em malha fechada saturado. A partir dessas condições poderão ser gerados algoritmos capazes de determinar as maiores regiões de estabilidade possíveis para o sistema. Para tanto, utiliza-se regiões elipsoidais de estabilidade, ou seja, considera-se conjuntos relacionados a funções quadráticas de Lyapunov.

Seja um sistema de tempo discreto descrito por

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(Kx(k)). \quad (3.30)$$

Definindo a não-linearidade de zona-morta $\phi(Kx(k)) = \text{sat}(Kx(k)) - Kx(k)$, a malha fechada é reescrita como

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) + B\phi(Kx(k)). \quad (3.31)$$

Considerando uma função quadrática de Lyapunov definida como

$$V(x(k)) = x(k)'Px(k), \quad P = P' > 0 \quad (3.32)$$

tem-se a seguinte definição

Definição 6 *Se existir uma matriz positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz diagonal $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ satisfazendo:*

$$\begin{bmatrix} -W & -Z' & W(A+BK)' \\ -Z & -2S & SB' \\ (A+BK)W & BS & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} W & WK'_{(i)} - Z'_{(i)} \\ K_{(i)}W - Z_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.34)$$

com $u_{0(i)} = \min\{u_{\min(i)}, u_{\max(i)}\}$, então o elipsoide $\varepsilon(P,1)$ com $P = W^{-1}$ é uma região de estabilidade assintótica para o sistema saturado (3.30) (TARBOURIECH et al., 2011).

3.2.2 Estabilização

Nesta seção serão apresentadas condições para projetar um ganho de realimentação de estado $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que o sistema saturado (3.30) seja regionalmente assintoticamente estável para um determinado conjunto de condições iniciais admissíveis, ou para maximizar a região de atração da origem.

Resolvendo como Tarbouriech et al. (2011), porém para o caso discreto, se faz uma mudança clássica da variável $Y = KW$ em (3.33) e (3.34) para linearizar o produto KW , introduzindo uma nova variável de decisão Y . Assim, tem-se a seguinte proposição

Proposição 2 *Se existir uma matriz simétrica positiva definida $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, uma matriz positiva diagonal $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, duas matrizes $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaça*

$$\begin{bmatrix} -W & -Z' & WA' + Y'B' \\ -Z & -2S & SB' \\ AW + BY & BS & -W \end{bmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} W & Y'_{(i)} - Z'_{(i)} \\ Y_{(i)} - Z_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.36)$$

com $u_{0(i)} = \min\{u_{\min(i)}, u_{\max(i)}\}$, então o ganho $K = YW^{-1}$ garante a estabilidade assintótica do sistema saturado (3.30) no elipsoide $\varepsilon(P,1)$, com $P = W^{-1}$ (TARBOURIECH et al., 2011).

3.3 Implementação computacional

As condições para verificação da estabilidade e estabilização de sistemas de controle com entrada saturada foram implementadas em MATLAB utilizando os *tollboxes*

YALMIP e Sedumi. As condições foram resolvidas como um problema de otimização submetido às restrições impostas pelas LMI's descritas neste capítulo. A solução da otimização fornece, quando factível, as matrizes variáveis que solucionam o problema de minimização dessas funções.

3.3.1 Estabilidade pela representação implícita afim por partes

O código desenvolvido avalia a estabilidade exponencial da origem de sistemas implícitos PWA como em (3.3). A implementação consiste em uma função cuja entrada são as matrizes que representam o sistema de forma implícita, ou seja, as matrizes F_1 , F_2 , F_3 , F_4 e f_5 e η . A saída dessa função retorna a factibilidade do sistema de entrada, em outras palavras, é apresentado se o sistema converge para a origem. Além disso, a função também retorna o valor da matriz P da função $V(x)$ de Lyapunov que soluciona o problema de otimização submetido às restrições das LMI's (3.24) e (3.29). O código é apresentado a seguir.

```
function [saida]=teorema42(F1,F2,F3,F4,f5,eta,estrutura)

if nargin < 7
    estrutura = [1 1;1 1];
elseif nargin <6
    eta= 0;
    estrutura = [1 1;1 1];
else
    eta = abs(eta);
    if eta >1
        eta = 0.99;
    end
end

n = size(F1,1);
ny = size(F2,2);

% Variaveis LMI
P11=sdpvar(n,n,'symmetric');
if estrutura(1,2) ~= 0
    P12=sdpvar(n,ny);
else
    P12 = zeros(n,ny);
```

```

end
if estrutura(2,2) ~=0
    P22=sdpvar(ny,ny,'symmetric');
else
    P22 = zeros(ny);
end
epsilon=sdpvar(1,1);

T1=sdpvar(ny,ny,'diagonal');
T2=sdpvar(2*ny,2*ny,'diagonal');

R1=sdpvar(1+n+2*ny,ny,'full');
R2=sdpvar(1+n+4*ny,2*ny,'full');

M1=sdpvar(1+2*ny,1+2*ny,'full'); % todos os valores positivos
M2=sdpvar(1+4*ny,1+4*ny,'symmetric');

P = [P11 P12; P12' P22];

% Matrizes auxiliares 1:
IT_esquerda=[zeros(1,ny); zeros(n,ny); eye(ny); zeros(ny)];
IT_direita=[zeros(ny, 1) zeros(ny,n) zeros(ny) eye(ny)];

IM=[1 zeros(1,n) zeros(1,ny) zeros(1,ny);
    zeros(ny,1) zeros(ny,n) eye(ny) zeros(ny);
    zeros(ny,1) zeros(ny,n) zeros(ny) eye(ny)];

H = [0 zeros(1,n) zeros(1,ny) zeros(1,ny);
    zeros(n,1) P11-epsilon*eye(n) P12 zeros(n,ny);
    zeros(ny,1) P12' P22 zeros(ny);
    zeros(ny,1) zeros(ny,n) zeros(ny) zeros(ny)];

F = [f5, F3, (F4-eye(ny)) eye(ny)];

ITt_esquerda=[zeros(1,2*ny); zeros(n,2*ny); eye(2*ny); zeros(2*ny)];
ITt_direita=[zeros(2*ny, 1) zeros(2*ny,n) zeros(2*ny) eye(2*ny)];

IMt=[1 zeros(1,n) zeros(1,2*ny) zeros(1,2*ny);

```

```

zeros(2*ny,1) zeros(2*ny,n) eye(2*ny) zeros(2*ny);
zeros(2*ny,1) zeros(2*ny,n) zeros(2*ny) eye(2*ny)];

etabar = 1-eta;
N1 = F1'*P11*F1-etabar*P11;
N2 = [F1'*P11*F2-etabar*P12 F1'*P12];
N3 = [F2'*P11*F2-etabar*P22 F2'*P12; P12'*F2 P22];

Ht = [0          zeros(1,n)    zeros(1,2*ny) zeros(1,2*ny);
      zeros(n,1)  N1          N2          zeros(n,2*ny);
      zeros(2*ny,1) N2'        N3          zeros(2*ny);
      zeros(2*ny,1) zeros(2*ny,n) zeros(2*ny)    zeros(2*ny)];

f5t = [f5;f5];
F4t = [F4 zeros(ny);F3*F2 F4];
F3t = [F3; F3*F1];

Ft = [f5t, F3t, (F4t-eye(2*ny)) eye(2*ny)];

% LMI 1:
LMIs = [H+0.5*((IT_esquerda*T1*IT_direita+IM'*M1*IM+R1*F)+(IT_esquerda*T1*IT_direita
+IM'*M1*IM+R1*F)')>=0];

% LMI 2:
LMIs = LMIs + [-Ht+0.5*((ITt_esquerda*T2*ITt_direita+IMt'*M2*IMt+R2*Ft)
+(ITt_esquerda*T2*ITt_direita+IMt'*M2*IMt+R2*Ft)')>=0];

LMIs=LMIs+[epsilon>0, M1(:)>0, M2(:)>0]
options=sdpsettings('solver','sedumi');
optimize(LMIs,[],options)
factivel = min(checkset(LMIs))
if factivel>0
    disp('factivel');
    saida.P = value(P);
    saida.M1 = value(M1);
    saida.M2 = value(M2);
    saida.T1 = value(T1);
    saida.T2 = value(T2);

```

```

saida.R1 = value(R1);
saida.R2 = value(R2);
saida.epsilon = value(epsilon);
saida.flag = 1;
else
saida.flag = -9;
end

```

3.3.2 Estabilidade pela abordagem de não-linearidade de setor

O objetivo é maximizar o conjunto $\varepsilon(P,1)$. Para isso, defini-se um algoritmo que, para a função convexa $f(\varepsilon(P,1))$, resolva para W , S e Z o seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\varepsilon(P,1)) \\ \text{sujeito às} \quad & \text{desigualdades (3.33) e (3.34)} \end{aligned}$$

Assim como na implementação da abordagem implícita afim por partes, foi desenvolvida uma função que recebe os parâmetros do sistema, só que do tipo (3.30). A função retorna a factibilidade do sistema e a matriz P da função de Lyapunov. O código desenvolvido é apresentado em sequência.

```

function [saida] = estabilidadeSetor(varargin)

A = varargin{1};
B = varargin{2};
K = varargin{3};
u0 = varargin{4};

% Definindo dimensões
n = size(A,1);
m = size(K,1);
m_k = size(K,2);
sizeu = size(u0,2);

% Variaveis LMI's
W = sdpvar(n,n,'symmetric');
S = sdpvar(m,m,'diagonal');
Z = sdpvar(m,n);

```

```

%LMI 3.33 (TCC)
LMIs = [];
LMIs = [-W, -Z', W*(A+B*K)'; -Z, -2*S, S*B'; (A+B*K)*W B*S -W]<0;

%LMI 3.34 (TCC)
for i =1:m
    LMIs = LMIs + [W W*K(i,1:n)' -Z(i,1:n)'; K(i,1:m_k)*W-Z(i,1:n), min(u0)^2 >=0];
end

% Otimizacao
options = sdpsettings('verbose',0,'warning',4,'solver','sedumi','showprogress',0);
saida.sol=optimize(LMIs,[],options);
warning('off','YALMIP:strict');
factivel = min(checkset(LMIs));
if factivel>0
    disp('factivel');
    saida.W = value(W);
    saida.flag = 1;
else
    disp('infactivel');
    saida.flag = -9;
    saida.factibilidade = factivel;
end

end

```

3.3.3 Estabilização a partir da abordagem de não-linearidade de setor

A estabilização por meio da condição de setor permite o cálculo de um ganho proporcional K otimizado para o processo. Busca-se um ganho K que maximize a região de atração da origem. Portanto, procura-se as matrizes de decisão W , Y , S e Z das LMI's (3.35) e (3.36). O código abaixo é uma função que implementa tais restrições para um sistema discreto saturado do tipo (3.30) e fornece as matrizes de decisão necessárias para o cálculo de $K = YW^{-1}$.

```

function [saida] = estabilizacao(varargin)

A = varargin{1};
B = varargin{2};

```

```

K = varargin{3};
u0 = varargin{4};

% Definindo dimensões
n = size(A,1);
m = size(K,1);
m_k = size(K,2);
sizeu = size(u0,2);

% Variaveis LMI's
W = sdpvar(n,n,'symmetric');
S = sdpvar(m,m,'diagonal');
Y = sdpvar(m,n);
Z = sdpvar(m,n);

%LMI 3.36 (TCC)
LMIs = [];
LMIs = [-W, -Z', W*A'+Y'*B'; -Z, -2*S, S*B'; A*W+B*Y B*S -W]<0;

%LMI 3.37 (TCC)
for i =1:m
    LMIs = LMIs + [W Y(i,1:n)'-Z(i,1:n)'; Y(i,1:n)-Z(i,1:n), min(u0)^2 >=0];
end

% objetivo da função:
% Opções da solução
options = sdpsettings('verbose',0,'warning',4,'solver','sedumi','showprogress',0);
saida.sol=optimize(LMIs,[],options);
warning('off','YALMIP:strict');

factivel = min(checkset(LMIs));
if factivel>0
    disp('factivel');
    saida.W = value(W);
    saida.Y = value(Y);
    saida.flag = 1;
else
    disp('infactivel');
    saida.flag = -9;

```

```
    saida.factibilidade = factivel;  
end  
  
end
```

3.4 Aplicação em Sistema Mecatrônico Saturado

A fim de aplicar as técnicas capazes de lidar com a saturação em atuadores, foi selecionado um sistema mecatrônico. Esta seção explicitará o processo, sua modelagem e verificará sua estabilidade de acordo com as condições desenvolvidas por Groff (2020) e as baseadas na não-linearidade setorial. Também será realizada a síntese de um controlador para o sistema com base na condição de setor e reavaliada a estabilidade com as duas abordagens em estudo. Por fim, será feita uma análise do desempenho de ambos os métodos.

3.4.1 Sistema com Atuador Elástico

Um atuador elástico em série (*Series Elastic Actuator* - SEA) é caracterizado por uma mola, posicionada entre uma carga e um atuador, sendo este um motor elétrico na maioria dos casos (OH; KONG, 2017). Esta ação, em aplicações de controle de força, proporciona melhor interação com os ambientes, visto que a mola desempenha o papel de transdutor entre a posição (deflexão da mola) e a força, controlando de forma mais precisa o torque de saída. Os SEAs conseguem se aproximar a um gerador de torque ideal com zero impedância de saída e ótima capacidade de rastreamento de torque. No entanto, o desempenho de controle de força do SEA possui limitações devido à sua elasticidade e, portanto, é inferior aos atuadores rígidos em termos de largura de banda.

Este tipo de atuador é comumente utilizado em sistemas mecatrônicos com interação com o ambiente, cujo objetivo é se ter um controle preciso da força interativa ou uma flexibilidade dos sistemas. Tem-se como exemplo a interação de braços robóticos que cooperam com operadores humanos. A Figura 3.3 apresenta esquematicamente um atuador elástico em série. A utilização de um elástico de transmissão permite a transferência e medição da força de atuação, convertendo um problema de controle de força em um problema de controle de posição.

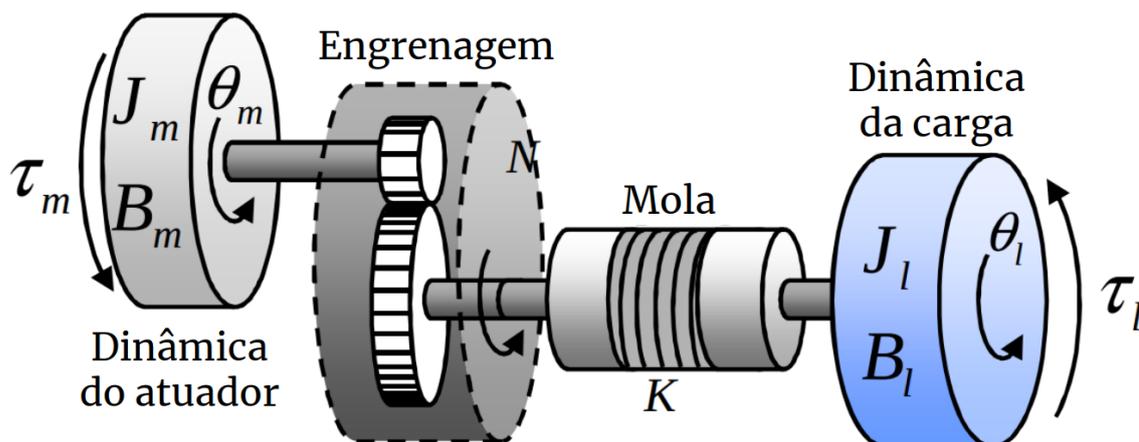


Figura 3.3: Modelo simplificado de um atuador elástico em série (OH; KONG, 2017)

A dinâmica do sistema SEA pode ser modelada como um sistema de duas massas quando a dinâmica do lado da carga é considerada, da forma como é caracterizado o processo na Figura 3.3. Assim, o sistema é constituído pela dinâmica do lado do motor, uma engrenagem que amplifica a força de saída (torque) do atuador, uma mola colocada entre a carga e o motor de um SEA e a dinâmica da carga.

Ressalta-se que as aplicações de algoritmos de controle convencionais ao SEA modelam o processo considerando o desvio de posição do lado da carga como entrada de perturbação externa, focando mais no controle da força transmitida através do componente elástico. Considerando o SEA como um sistema convencional de duas massas, os algoritmos dão mais atenção ao controle da posição do lado da carga.

A seguir serão modeladas as dinâmicas do atuador e da carga e na sequência será obtido a modelagem final de um sistema SEA.

Dinâmica do lado do atuador

O torque gerado por um motor (τ_m) deve ser capaz de acelerá-lo de um ponto de inércia a outro. Esta capacidade é denominada torque inercial τ_j , que das leis da física pode ser calculado como

$$\tau_j = J_m \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (3.37)$$

em que J_m é o momento de inércia do motor mais o momento de inércia da caixa de engrenagens e $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ é a aceleração angular.

O torque τ_m ainda precisa suprir todas as perdas que ocorrem durante o movimento, tal como a fricção. Esta contribuição se dá pelo torque de atrito ou torque de arrasto do eixo do motor (τ_B) que é uma função linear da velocidade angular do rotor.

Quanto maior a velocidade, maior será o atrito e conseqüentemente maior será o torque de arrasto, sendo este dado por

$$\tau_B = B_m \frac{d\theta_m}{dt} \quad (3.38)$$

em que B_m representa o coeficiente de fricção do motor, incluindo a fricção das escovas e engrenagens e $\frac{d\theta_m}{dt}$ é a velocidade angular do motor. Portanto, considerando as demais formas de perda desprezíveis, o torque em termos do ângulo do motor é calculado como

$$\begin{aligned} \tau_m &= \tau_B + \tau_j \\ \tau_m &= B_m \frac{d\theta_m}{dt} + J_m \frac{d^2\theta_l}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dinâmica do lado da carga

A dinâmica da carga pode ser complicada e não linear, mas esta pode ser representada por uma inércia simples (J_l) e um coeficiente de amortecimento (B_l) que pode refletir a parte linear da dinâmica complicada. Assim, de forma semelhante a ao torque do motor, o torque do lado da carga, τ_l , é dado por

$$\tau_l = B_l \frac{d\theta_l}{dt} + J_l \frac{d^2\theta_l}{dt^2} \quad (3.40)$$

Dinâmica do sistema SEA

No processo da Figura 3.3, K é a constante que representa a elasticidade da mola; θ_m e θ_l representam a posição angular medida do lado do motor e do lado da carga, respectivamente e θ_d é a diferença entre θ_m e θ_l :

$$\theta_d = N_m^{-1}\theta_m - \theta_l \quad (3.41)$$

ou seja, θ_d é a deflexão da mola já considerando a taxa de redução das engrenagens N_m . O sistema do lado da carga é submetido a forças de entrada, tal como o torque (τ_m) do motor, que é considerada como uma entrada de controle para o sistema SEA e uma perturbação aplicada à carga (d_l) ou à mola (d_d). A Figura 3.4 apresenta um diagrama de blocos com as relações entre as dinâmicas envolvidas no sistema SEA, considerando (3.39), (3.40), (3.41) descritas no domínio de Laplace, a elasticidade da mola e as perturbações d_l e d_d .

A partir do diagrama de blocos da Figura 3.4 obtém-se as relações matemáticas entre as entradas e saídas do sistema com atuador elástico:

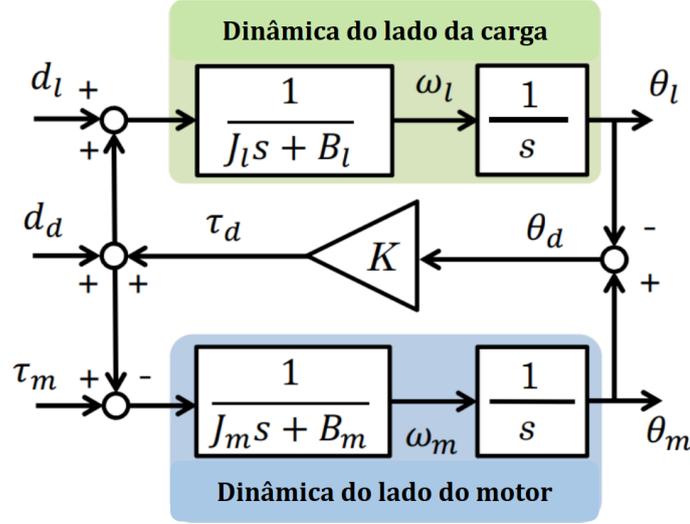


Figura 3.4: Diagrama de blocos do sistema SEA modelado como um sistema de duas massas (OH; KONG, 2017)

$$\begin{bmatrix} \theta_m \\ \theta_d \\ \theta_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P_m(1+KP_l)}{D(s)} & \frac{N^{-1}P_m}{D(s)} & \frac{KN_m^{-1}P_mP_l}{D(s)} \\ \frac{N^{-1}P_m}{D(s)} & \frac{-N^{-2}P_m-P_l}{D(s)} & -\frac{P_l}{D(s)} \\ \frac{KN_m^{-1}P_mP_l}{D(s)} & \frac{-P_l}{D(s)} & \frac{P_l(1+KN_m^{-2}P_m)}{D(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_m \\ d_d \\ d_l \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

em que $P_m(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{J_m s + B_m}$ descreve a função de transferência da dinâmica do lado do motor e $P_l(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{J_l s + B_l}$ é a dinâmica do lado da carga. O denominador comum $D(s)$ é $D(s) = 1 + KN_m^{-2}(s)P_m(s) + KP_l(s)$.

O trabalho do Oh e Kong (2017) visou o controle da força transmitida (torque) à carga através da mola, que corresponde a $\tau_d = K\theta_d$ na Figura 3.4. Sendo a precisão da força transmitida em relação à força desejada a principal preocupação de Oh e Kong (2017). Para realizar o controle de força de alta precisão por um SEA, a deflexão da mola, θ_d , é selecionada como a variável de controle e é realimentada para o sistema. Observa-se que o torque transmitido τ_d é linearmente proporcional a θ_d e, portanto, o problema de controle de força pode ser convertido em um problema de controle de posição. Para gerar o torque desejado τ_d^r , a deflexão da mola é controlada para seguir uma trajetória de referência.

Como o foco do controle é a deflexão da mola, o modelo dinâmico de malha aberta do sistema de duas massas (3.42) pode ser reescrito em função transferência das entradas de controle para a deflexão da mola como

$$\Theta_d = \frac{N_m^{-1}P_m\mathcal{T}_m - P_l\mathcal{D}_l - (N_m^{-2}P_m + P_l)\mathcal{D}_d}{1 + KP_l + KN_m^{-2}P_m} \quad (3.43)$$

em que Θ_d , \mathcal{T}_m e \mathcal{D} são as transformadas de Laplace de θ_d , τ_m e d , respectivamente.

O atuador elástico utilizado no trabalho de Oh e Kong (2017) possui parâmetros de valores iguais aos apresentados na Tabela 3.1. Estes foram obtidos a partir de um resultado de identificação.

Tabela 3.1: Parâmetros do atuador elástico considerado (OH; KONG, 2017)

Parâmetro	Nomenclatura	Valor
J_m	Inércia do motor	$5,2500e^{-6}$ kg·m ²
B_m	Amortecimento do motor	$4,5356e^{-6}$ Nm·s/rad
K	Rigidez da mola	0,48 Nm/rad
J_l	Inércia de carga	0,0225 kg·m ²
B_l	Amortecimento de carga	0,4697 Nm·s/rad
N_m	Taxa de redução	20

Aplicando os valores da Tabela 3.1 em (3.43) e considerando inicialmente as perturbações \mathcal{D}_l e \mathcal{D}_d iguais a zero, obtém-se

$$\frac{\Theta_d}{\mathcal{T}_m} = \frac{9524s + 1,988e^5}{s^3 + 21,74s^2 + 267,9s + 4790} \quad (3.44)$$

Utilizando um período de amostragem T igual a $T = 0,04$ é possível discretizar (3.44), obtendo:

$$\frac{\Theta_d}{\mathcal{T}_d} = \frac{7,288z^2 + 4,035z - 3,122}{z^3 - 2,03z^2 + 1,647z - 0,4191} \quad T = 0,04 \quad (3.45)$$

cuja representação em espaço de estados é dada pelas matrizes

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2.0298 & -1.6465 & 0.4191 \\ 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 7.2879 & 4.0354 & -3.1223 \end{bmatrix} & D &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Os atuadores elásticos em série (SEAs) possuem limitações devido à sua característica dinâmica, que é principalmente atribuída à elasticidade no SEA. Além disso, em sistemas com motor elétrico, a velocidade e o torque máximos são limitados. No caso do motor utilizado por Oh e Kong (2017), a velocidade máxima contínua e o torque são, respectivamente, 8200 r/mim e 0,181 Nm.

Sistema SEA na representação implícita PWA

Considerando o sistema (3.46) na forma de (3.11) discretizado com $T = 0.04$ e submetido ao atuador saturado, tem-se

$$x^+ = Ax + B\text{sat}_{[-0.181, 0.181]}(Kx) \quad (3.47)$$

com A e B de (3.46) e um ganho qualquer dado por $K = [-0,7402 \ 0,8997 \ -0,3570]$. Este ganho foi calculado de modo que os polos de malha fechada do sistema sejam $p_1 = 0,99$, $p_2 = 0,98$ e $p_3 = 0,8$.

Usando (3.11), tem-se que o lado direito do sistema acima é escrito como em (3.25), com $f(x)$ definido por

$$F_1 = A + BK, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -B & B \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e F_3 , F_4 e f_5 como em (3.11).

Análise de estabilidade e estabilização do sistema SEA

Os resultados que serão apresentados a seguir foram obtidos a partir do código apresentado no Apêndice A. Avaliou-se quatro casos:

Caso 1: Consiste na análise da estabilidade para o sistema PWA, de acordo com as condições de Groff (2020), com K projetado por alocação de polos (denominado K dado). Considerando uma função de Lyapunov quadrática por partes como em (3.26) e aplicando nas condições de verificação de estabilidade implementadas pelas LMI's da função `teorema42()`, com $\eta = 0.01$, certificou-se que o sistema é globalmente estável com

$$P = \begin{bmatrix} 0,4866 & -0,3429 & 0,0370 & -0,4682 & 0,4682 \\ -0,3429 & 0,6688 & -0,2572 & 0,5336 & -0,5336 \\ 0,0370 & -0,2572 & 0,3260 & -0,1932 & 0,1932 \\ -0,4682 & 0,5336 & -0,1932 & -1,2407 & -0,1807 \\ 0,4682 & -0,5336 & 0,1932 & -0,1807 & -1,2407 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Caso não existisse P que satisfizesse a desigualdade (3.26), então a estabilidade do sistema não poderia ser avaliada a partir da função candidata a Lyapunov escolhida.

Caso 2: Neste caso é analisada a estabilidade do sistema com as condições derivadas da modelagem por não-linearidade setorial para K dado. A partir da função desenvolvida, `estabilidadeSetor()`, obteve-se para (3.46), a matriz

$$P = W^{-1} = \begin{bmatrix} 2,9930 & -2,0128 & 0,5012 \\ -2,0128 & 2,6052 & -0,6916 \\ 0,5012 & -0,6916 & 0,7819 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

configurando, assim, a factibilidade do problema de otimização avaliado, e portanto, a estabilidade local do sistema (3.46). Observa-se que $P = P' > 0$, atendendo a consideração da função quadrática de Lyapunov definida para derivar as condições obtidas com base nas propriedades de não-linearidade de setor.

Caso 3: Análise da estabilidade com as condições derivadas da modelagem por não-linearidade setorial, com K calculado a partir das condições providas pela não-linearidade de setor (denominado K otimizado). A partir da função `estabilizacao()` desenvolvida, obteve-se a matriz P e o ganho otimizado

$$P = W^{-1} = \begin{bmatrix} 3,3820 & -1,4962 & 0,5323 \\ -1,4962 & 2,3556 & -0,5521 \\ 0,5323 & -0,5521 & 0,9941 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$K = YP = \begin{bmatrix} -0,2512 & 0,4065 & -0,0164 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,3820 & -1,4962 & 0,5323 \\ -1,4962 & 2,3556 & -0,5521 \\ 0,5323 & -0,5521 & 0,9941 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -1,4664 & 1,3423 & -0,3744 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Assim, tem-se que o sistema (3.46) também é localmente estável com K otimizado.

Caso 4: Análise da estabilidade para o sistema PWA, de acordo com as condições de Groff (2020), com K otimizado (3.52). Gerou-se com a função `teorema42()`, com $\eta = 0.01$, a matriz P

$$P = \begin{bmatrix} 0,1248 & 0,4711 & -0,3191 & -0,8586 & 0,8586 \\ 0,4711 & 0,3871 & -0,0446 & 0,7282 & -0,7282 \\ -0,3191 & -0,0446 & 0,5335 & -0,1919 & 0,1919 \\ -0,8586 & 0,7282 & -0,1919 & -1,0227 & -0,1640 \\ 0,8586 & -0,7282 & 0,1919 & -0,1640 & -1,0227 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

indicando a factibilidade da otimização, e conseqüentemente, a estabilidade global do sistema (3.46).

É apresentado na Figura 3.5 as trajetórias do sistema (para a condição inicial $x(0) = [4, 4, 4]$) e os conjuntos de níveis da função de Lyapunov decrescente para os quatro casos discutidos. Nota-se que a Figura 3.5 representa um corte da função de Lyapunov $V(x)$, que neste processo pertence a \mathbb{R}^3 . Além disso, vê-se que a trajetória convergiu para a origem do sistema nos quatro casos em questão, certificando a estabilidade local e global do processo. Com relação a utilização do ganho proporcional otimizado, percebeu-se que seu uso implicou no aumento da velocidade de convergência da trajetória, visto que houve uma diminuição dos pontos da trajetória ao redor da origem.

Referente ao tamanho da estimativa da região de atração, para sistemas como (3.46), a abordagem do Groff (2020), que avalia a estabilidade global, possui vantagens com relação as condições de setor. Por garantir a estabilidade global do sistema PWA, o tamanho da estimativa da região de atração é todo o espaço de estados, que é igual a \mathbb{R}^3 para o processo SEA. Já a avaliação feita com base na condição de setor assegura a estabilidade local do sistema, sendo portanto, a estimativa da região de atração menor do

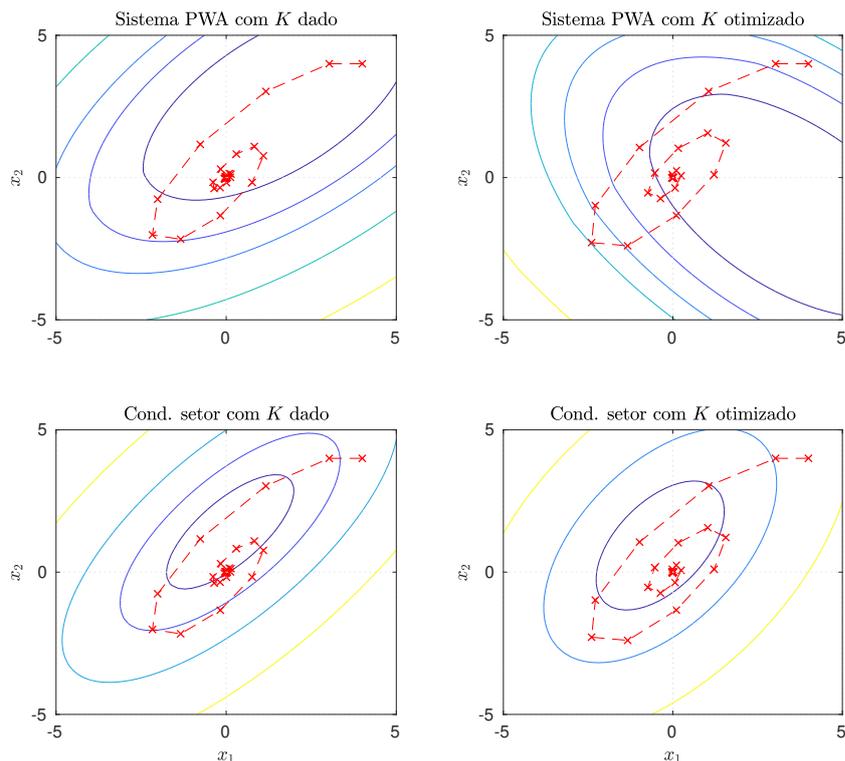


Figura 3.5: Curvas de nível da função Lyapunov e trajetória do sistema SEA nos casos 1, 2, 3 e 4

que a obtida no caso global. Portanto, a representação PWA apresenta vantagens para o sistema SEA com relação à Condição de Setor, pois uma maior região de atração garante uma maior faixa de operação para o sistema, garantindo mais condições iniciais que levam a uma trajetória convergente.

Observa-se ainda, que no corte de x_1 e x_2 a convergência para ambos os métodos aparenta ser bastante próxima. Como a Condição de Setor é uma abordagem já consolidada na literatura, a convergência dos estados se apresentar similar para ambos os casos é um ponto positivo, pois afirma ainda mais a eficácia da abordagem proposta por Groff (2020). A partir da mesma figura, pode-se notar que a principal diferença entre os resultados obtidos pelas duas abordagens são os conjuntos de níveis da função de Lyapunov. Nota-se um conjunto de nível maior para o caso PWA, ou seja, é um resultado menos conservador, ele abrange uma região maior de condições iniciais que podem convergir para a origem.

Uma simulação temporal para a mesma condição inicial ($x(0) = [4, 4, 4]$) foi realizada a partir de (3.47), gerando a resposta apresentada na Figura 3.6. Verifica-se que de fato o sinal de controle foi saturado, ultrapassando os limites superior e inferior estabelecidos. E apesar da saturação, o sistema não se instabilizou, como assegura os resultados apontados pela análise das condições fornecidas pelo modelo implícito por parte e da não-linearidade de setor.

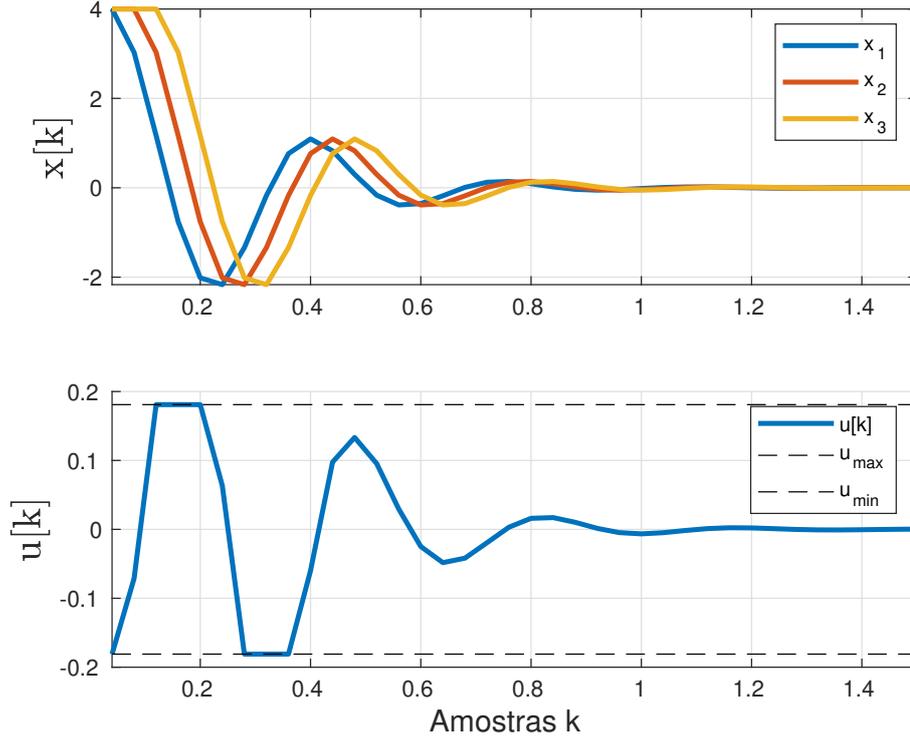


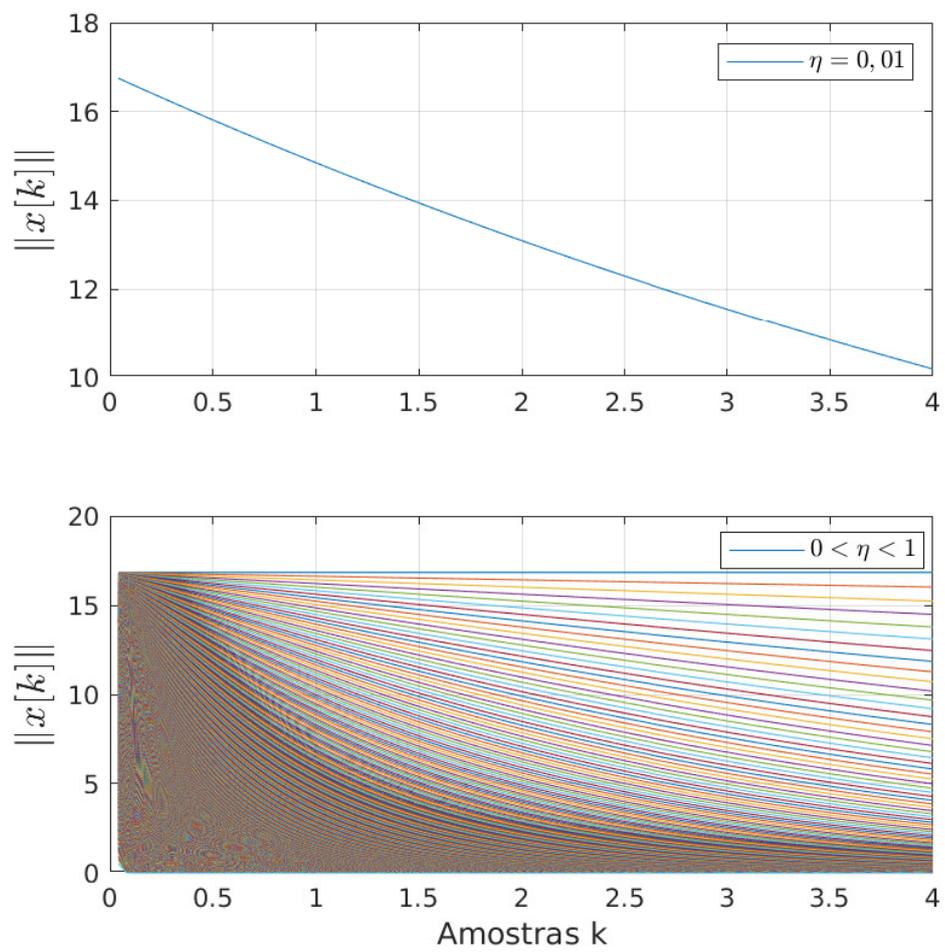
Figura 3.6: Estados do sistema e sinal de controle do processo SEA

Ainda, para melhor entender a nova abordagem, analisou-se o conservadorismo das condições estabelecidas por Groff (2020) para o sistema SEA. Simulou-se o comportamento da norma do estado em função da variação de η pela relação

$$\|x(k)\| \leq \gamma \alpha^k \|x(0)\| \quad (3.54)$$

$$\gamma = \frac{\epsilon_2^{(\frac{1}{2})}}{\epsilon_1} \quad \alpha = (1 - \eta)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

obtida pela prova do Teorema 4, detalhada em (GROFF, 2020). η é um componente que descreve a taxa de decaimento exponencial de convergência das trajetórias para a origem do sistema. A resposta dessa simulação está na Figura 3.7 para $\eta = 0,01$, que foi o valor utilizado na simulação do sistema SEA e para $0 < \eta < 1$. Nesse último caso, as curvas menos inclinadas são as que possuem η mais próximos de zero e quanto mais próximo dos eixos do gráfico está a curva, mais próximo η está de 1. Percebe-se que quanto mais próximo de 1 é η , mais conservador fica a estimação do estado. A região abaixo dessa curva representa o envelope que contém uma aproximação dos estados estáveis do sistema, dada a variação no sinal de controle. Contudo, a região abaixo da curva $\|x\| - \eta$ é uma estimação que fica bem maior do que a região para os estados reais. Como o processo PWA é chaveado, não se sabe para um dado estado qual a sua partição exata, pois são desconsiderados os saltos que ocorrem entre uma partição e outra.

Figura 3.7: Aproximação do estado $x(k)$

Conclusões e Perspectivas

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações sobre os resultados obtidos, bem como perspectivas de continuidade do trabalho.

Apresentou-se o novo método de representação PWA para a não linearidade de saturação, juntamente com condições de verificação da estabilidade propostas por Groff (2020). O mesmo se deu para as condições de estabilidade e estabilização derivadas da não-linearidade setorial. Tais condições foram implementadas de forma computacional e testadas em um modelo de um sistema com atuador elástico. Os resultados obtidos demonstraram que a saturação presente no torque do atuador foi bem representada e que os estados do sistema, apesar da saturação do sinal de controle, convergiram para o ponto de equilíbrio, demonstrando a estabilidade.

A representação implícita afim por partes apresenta vantagens para o sistema SEA com relação ao modelo de não-linearidade setorial. A abordagem proposta por Groff (2020) fornece condições que permitem avaliar a estabilidade global do sistema, fornecendo uma estimativa de região de atração maior do que a fornecida pela estabilidade local. Com uma região de atração maior, se garante a estabilidade do sistema para mais condições iniciais, ampliando a faixa de operação do processo. Contudo, é interessante ter condições que avaliem a estabilidade regional dos sistemas, pois nem sempre a estabilidade global dos sistemas não-lineares poderá ser avaliada. Observou-se também que a convergência das trajetórias na representação PWA foi bem próxima a convergência obtida com a condição de setor. Uma vez que a condição de setor é uma abordagem bem consolidada na literatura, com resultados importantes, essa proximidade é um ponto extremamente positivo para a abordagem proposta por Groff (2020), pois afirma ainda mais sua eficácia.

Uma dificuldade encontrada durante o estudo para execução desse trabalho — que constitui uma desvantagem da representação implícita afim por partes com relação ao uso da não-linearidade de setor — é a passagem da representação do sistema em espaço

de estados para o modelo implícito afim por partes. Há um *loop* algébrico que dificulta o processo, mas em nada interfere nos resultados assertivo das condições propostas por Groff (2020).

4.1 Perspectivas e trabalhos futuros

Para enriquecer o estudo realizado e os resultados obtidos, é possível aprofundar as análises e formular novas condições, como:

- Comparação da velocidade de convergência para a origem dos sistemas dos métodos em estudo;
 - Avaliação dos resultados quando são acrescentadas perturbações e distúrbios no sistema;
 - Estudo do problema de saturação em velocidade e possível extensão para outros tipos de não-linearidades;
 - Obtenção de condições de estabilidade local com base na representação implícita afim por partes;
 - Analisar diferentes condições iniciais, como por exemplo na casca da região de atração, fora da região de atração porém próximo do limiar da mesma.
-

Referências

- ALEXANDER, Charles K; SADIKU, Matthew NO. **Fundamentos de circuitos elétricos**. [S.l.]: AMGH Editora, 2013.
- BISHOP, Robert H; BISHOP, Robert H. **The mechatronics handbook**. [S.l.]: CRC press Boca Raton, 2002. v. 121.
- BORGNAKKE, Claus; SONNTAG, Richard E. **Fundamentos da termodinâmica**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018.
- DUAN, Guang-Ren; YU, Hai-Hua. **LMIs in control systems: analysis, design and applications**. [S.l.]: CRC press, 2013.
- FIGUEIREDO, Larissa S et al. Design of LPV-PI-like controller with guaranteed performance for discrete-time systems under saturating actuators. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 53, n. 2, p. 3898–3903, 2020.
- GROFF, Leonardo Broering. **EVENT-TRIGGERED CONTROL FOR PIECEWISE AFFINE DISCRETE-TIME SYSTEMS**. 2020. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
- HEDMAN, Max; MERCORELLI, Paolo. FFTSMC with optimal reference trajectory generated by MPC in robust robot motion planning with saturating inputs. In: IEEE. 2021 American Control Conference (ACC). [S.l.: s.n.], 2021. p. 1470–1477.
- HU, Tingshu; LIN, Zongli. **Control systems with actuator saturation: analysis and design**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.
- KAPILA, Vikram; GRIGORIADIS, Karolos. **Actuator saturation control**. [S.l.]: CRC Press, 2002.
- KARNOPP, Dean C; MARGOLIS, Donald L; ROSENBERG, Ronald C. **System dynamics: modeling, simulation, and control of mechatronic systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- LIU, Fucai; WANG, Cancan; GENG, Qing. Observer-based MPC for NCS with actuator saturation and DoS attacks via interval type-2 T–S fuzzy model. **IET Control Theory & Applications**, IET, v. 14, n. 20, p. 3537–3546, 2020.

- NGUYEN, AnhTu; DAMBRINE, Michel; LAUBER, Jimmy. Lyapunov-based robust control design for a class of switching non-linear systems subject to input saturation: application to engine control. **IET Control Theory & Applications**, IET, v. 8, n. 17, p. 1789–1802, 2014.
- NISE, Norman S; SILVA, Fernando Ribeiro da. **Engenharia de sistemas de controle**. [S.l.]: LTC, 2013. v. 6.
- NORTON, Robert L. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos**. [S.l.]: AMGH Editora, 2010.
- _____. **kinematics and dynamics of machinery**. [S.l.]: McGraw Hill Education, 2011.
- OH, Sehoon; KONG, Kyoungchul. High-Precision Robust Force Control of a Series Elastic Actuator. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, v. 22, n. 1, p. 71–80, 2017. DOI: 10.1109/TMECH.2016.2614503.
- PAIM, Cristiane et al. **Análise e controle de sistemas lineares sujeitos a saturação**. Florianópolis, SC, 2003.
- RAN, Maopeng; WANG, Qing; DONG, Chaoyang. Stabilization of a class of nonlinear systems with actuator saturation via active disturbance rejection control. **Automatica**, Elsevier, v. 63, p. 302–310, 2016.
- SALAVATI, Saeed; GRIGORIADIS, Karolos; FRANCHEK, Matthew. A Generalized Sector Condition Approach to Observer-Based Control of Input-Delay LPV Systems under Saturation and Matched Disturbances. In: IEEE. 2021 American Control Conference (ACC). [S.l.: s.n.], 2021. p. 4946–4951.
- SILVA JUNIOR, Joao Manoel Gomes da; TARBOURIECH, Sophie. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE transactions on automatic control**. vol. 50, no. 1 (Jan. 2005), p. 106-111, 2005.
- SPONG, Mark W; HUTCHINSON, Seth; VIDYASAGAR, Mathukumalli. **Robot modeling and control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2020.
- TARBOURIECH, Sophie et al. **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- TEEL, Andrew R; ZACCARIAN, Luca. **Modern Anti-Windup Synthesis: Control Augmentation for Actuator Saturation**. [S.l.]: Princeton University Press, 2011.
- WANG, Liuping. **Model predictive control system design and implementation using MATLAB®**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.

Código para Análise do Sistema SEA - PWA

```

clear all
clc

%% Sistema

Jm = 5.2500e-6; % inercia do motor
Bm = 4.5356e-6; % amortecimento do motor
Km = 0.48;      % rigidez da mola
Jl = 0.0225;   % inercia da carga
Bl = 0.4697;   % amortecimento da carga
Nm = 20;       % taxa de reducao

P1 = tf(1,[Jl Bl 0]);
Pm = tf(1,[Jm Bm 0]);
D = 1 + Km*Nm^(-2)*Pm + Km*P1;

muup = 0.181; % torque maximo
mulow = -0.181; % torque minimo
u0 = [mulow, muup];

G1 = Nm^(-1)*Pm/(1+ Km*P1 + Km*Nm^(-2)*Pm); % perturbacao = 0
G1 = minreal(G1);
T = 0.4e-1; % periodo de amostragem
G1_d = c2d(G1,T); % discretizacao
[A,B,C,D] = tf2ss(G1_d.numerator{1},G1_d.denominator{1});

```

```

%% Projeto do controlador por alocação de polos:
PolosDesejados = [0.99 0.98 0.8];
%PolosDesejados = [0.7 0.71 0.5];
K = place(A,B,PolosDesejados);
% Fechamento da malha de controle com os ganhos de estados K
Acl = A-B*K;
% Verificacao se os ganhos de fato colocaram os polos nas posicoes desejadas.
% Simulacao do sistema em malha fechada
Gmf = ss(Acl, B, C, D, T);

%% Representacao implicita e estabilidade

F1 = A + B*K;
F2 = [-B B];
F3 = [K; -K];
F4 = [0 0; 0 0];
f5 = [-muup; mulow];
eta = 0.01;
saida = teorema42(F1,F2,F3,F4,f5,eta); % representacao implicita afim por partes

close all
P = saida.P;

%% Curvas de nivel Lyapunov p/ sistema pwa com k dado

clear x1 x2 x3
x1 = -5:0.2:5;
x2 = -5:0.2:5;
x3 = -5:0.2:5;

x = [x1;x2;x3];
clear V;
clear phi;
for i =1:length(x1)
    for j=1:length(x2)
        for w=1:length(x3)
            phi=r([x1(i); x2(j); x3(w)],F3, f5);
            V(i,j,w) = [x1(i) x2(j) x3(w) phi]*P*[x1(i); x2(j); x3(w); phi'];
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end

crop = V(:, :, i);
V12 = squeeze(crop);
crop = V(i, :, :);
V23 = squeeze(crop);
crop = V(:, i, :);
V13 = squeeze(crop);

% Trajetoria
x = [4;4;4]; % condicao inicial
for j = 2:100
    x(:, j) = A*x(:, j-1) + B*sat(mulow, muup, x(:, j-1), K);
end

%% Estabilidade pela cond setor com K dado

saida_setor = estabilidadeSetor(A, B, K, u0);
clear x_setor;
x_setor = [x1; x2; x3];
W = saida_setor.W;
P_setor = inv(W);

clear V_setor;
% curva de nivel
for i = 1:length(x1)
    for j = 1:length(x2)
        for w = 1:length(x3)
            V_setor(i, j, w) = [x1(i) x2(j) x3(w)]*P_setor*[x1(i); x2(j); x3(w)];
        end
    end
end

crop = V_setor(:, :, i);
V12_setor = squeeze(crop);

```

```

% Trajetoria
%x1 vs x2
x_setor = [4;4;4]; % condicao inicial
for j = 2:100
    x_setor(:,j) = A*x_setor(:,j-1) + B*sat(mulow,muup,x_setor(:,j-1),K);
end

%% Estabilizacao a partir da cond. setor

saida_estabilizacao = estabilizacao(A,B,K,u0);
W_estabilizacao = saida_estabilizacao.W;
Y_estabilizacao = saida_estabilizacao.Y;
P_estabilizacao = inv(W_estabilizacao);
K_estabilizacao = Y_estabilizacao*P_estabilizacao;

%% Estabilidade cond. setor com k otimizado
for i =1:length(x1)
    for j=1:length(x2)
        for w=1:length(x3)
            V_estabilizacao(i,j,w) = [x1(i) x2(j) x3(w)]*P_estabilizacao*[x1(i); x2(j);
            end
        end
    end
end

crop = V_estabilizacao(:,:,i);
V12_estabilizacao = squeeze(crop);

% Trajetoria
%x1 vs x2
x_estabilizacao = [4;4;4]; % condicao inicial
for j = 2:100
    x_estabilizacao(:,j) = A*x_estabilizacao(:,j-1) + B*sat(mulow,muup,x_estabilizacao(:,j-1),K);
end

%% Estabilidade p/ sistema PWA com K otimizado

F1_pwak = A + B*K_estabilizacao;

```

```

F2_pwak = [-B B];
F3_pwak = [K_estabilizacao; -K_estabilizacao];
saida_pwak = teorema42(F1_pwak,F2_pwak,F3_pwak,F4,f5,eta); % representacao implicita

P_pwak = saida_pwak.P;

for i =1:length(x1)
    for j=1:length(x2)
        for w=1:length(x3)
            phi_pwak=r([x1(i); x2(j); x3(w)],F3_pwak, f5);
            V_pwak(i,j,w) = [x1(i) x2(j) x3(w) phi_pwak]*P_pwak*[x1(i); x2(j); x3(w)];
        end
    end
end

crop = V_pwak(:,:,i);
V12_pwak = squeeze(crop);
crop = V_pwak(i,:,:);
V23_pwak = squeeze(crop);
crop = V_pwak(:,i,:);
V13_pwak = squeeze(crop);

% Trajetoria
x_pwak = [4;4;4]; % condicao inicial
for j = 2:100
    x_pwak(:,j) = A*x_pwak(:,j-1) + B*sat(mulow,muup,x_pwak(:,j-1),K_estabilizacao);
end

%% Figura curvas de nivel e trajetorias para os quatro casos

figure(1)
subplot(2,2,1)
contour(x1,x2,V12', [10,15,20,30,50,100])
grid
hold on
plot(x(1,:),x(2:,:), 'r--x')
ylabel('$x_2$', 'Interpreter','latex');
title('Sistema PWA com $$ dado', 'Interpreter','latex')

```

```
subplot(2,2,3)
contour(x1,x2,V12_setor', [10,20,30,50,100])
grid
hold on
plot(x_setor(1,:),x_setor(2:),'r--x')
xlabel('$x_1$', 'Interpreter','latex');
ylabel('$x_2$', 'Interpreter','latex');
title('Cond. setor com $K$ dado', 'Interpreter','latex')

subplot(2,2,4)
contour(x1,x2,V12_estabilizacao', [10,20,30,50,100])
grid
hold on
plot(x_estabilizacao(1,:),x_estabilizacao(2:),'r--x')
xlabel('$x_1$', 'Interpreter','latex');
ylabel('$x_2$', 'Interpreter','latex');
title('Cond. setor com $K$ otimizado', 'Interpreter','latex')

subplot(2,2,2)
contour(x1,x2,V12_pwak', [15,20,25,30,50,100])
grid
hold on
plot(x_pwak(1,:),x_pwak(2:),'r--x')
ylabel('$x_2$', 'Interpreter','latex');
title('Sistema PWA com $K$ otimizado', 'Interpreter','latex')

%% Simulacao temporal

figure(5)
subplot(2,1,1);
t = T:T:4;
plot(t,x(1:), 'LineWidth', 2)
hold on
plot(t,x(2:), 'LineWidth', 2)
plot(t,x(3:), 'LineWidth', 2)
xlim([T 1.5])
grid on
```

```

legend('x_1','x_2','x_3')
ylabel('x[k]','Interpreter','latex','FontSize', 16)

% sinal de controle
%u = K*x;
u = sat(mulow, muup, x, K);
subplot(2,1,2)
hold on
plot(t,u,'LineWidth',2)
up = muup*ones(size(t));
low = mulow*ones(size(t));
plot(t,up,'k--')
plot(t,low,'k--')
xlim([T 1.5])
grid on
legend('u[k]','u_{max}','u_{min}')
xlabel('Amostras k','FontSize', 12)
ylabel('u[k]','Interpreter','latex','FontSize', 16)

%% Analise dessemepnho

% Variacao de eta
e2 = max(eig(P));
e1 = min(eig(P));
gamma = (-e2/e1)^(0.5);
et = 0:0.001:0.999;
x_ = [];
for k = 1:100 % tamanho de k=T:T4
    for j = 1:length(et)
        alpha = (1-et(j))^(0.5);
        x_(k,j) = gamma*alpha^k*norm([4,4,4]);
    end
end

figure(6)
subplot(2,1,1);
plot(t,x_(:,11)); % eta = 0.01
grid on
ylabel('\$|x[k]|\$','Interpreter','latex','FontSize', 16)

```

```
legend('$\eta = 0,01$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 10)
subplot(2,1,2);
plot(t,x_); % para eta de 0 a 1
grid on
xlabel('Amostras k', 'FontSize', 12)
ylabel('$|x[k]|$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 16)
legend('$ 0 < \eta < 1$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 10)

%% RAMPA
function phi = rampa(y)
phi = [];
for i = 1:length(y)
    if y(i) <= 0
        phi(i) = 0;
    else
        phi(i) = y(i);
    end
end
end
end
```